Problème

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^4 - 4x - 3$

1°) Etudier les variations de g.

2°) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β sur $\mathbb{R}$ telles que : $\alpha < 0 < \beta$.
b) Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α et de β.
c) Déterminer le signe de $g(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ - {1} par :

$$f(x) = \frac{x^4 + 1}{x^3 - 1}$$

et C_f sa courbe représentative placée dans un repère orthonormal d'unité 2 cm.

1°) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2°) a) Déterminer les réels a, b, c, d et e tels que pour tout $x \neq 1$:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx^2 + dx + e}{x^3 - 1}$$

b) Démontrer que la droite d'équation y = x est asymptote à la courbe représentative de f.
c) Préciser la position de C_f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3°) a) Démontrer que pour tout $x \neq 1$, on a : $f'(x) = \dfrac{x^2 g(x)}{(x^3 - 1)^2}$

b) En déduire les variations de f.

4°) En utilisant les encadrements de la partie A, déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ et de $f(\beta)$.

5°) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1.

6°) Dresser le tableau de variation complet de f et tracer C_f .