Problème

L'objet de ce problème est d'étudier une fonction à l'aide d'un fonction auxiliaire et de calculer l'aire d'un domaine plan.

Partie A

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle]-1 ; +∞[par :

$$f(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1).$$

1°)

a) Déterminer les limites de *f* aux bornes de]-1 ; +∞[.

b) Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction *f*.

2°) Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α, appartient à [–0,72 ; –0,71].

3°) Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à]-1 ; +∞[.

Partie B

Soit *g* la fonction définie sur l'ensemble]-1 ; 0[∪]0 ; +∞[par :

$$g(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}.$$

1) Etude de *g* aux bornes de]-1 ; 0[∪]0 ; +∞[.

Déterminer les limites de *g* aux bornes de]-1 ; 0[∪]0 ; +∞[.

2) Sens de variation de *g*

a) Calculer $g'(x)$ pour tout x de]-1 ; 0[∪]0 ; +∞[, et déduire , à l'aide de la partie A, le signe de $g'(x)$.

b) Montrer que $g(\alpha)=\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha = -0{,}715$.

3°) Tableau de variation et représentation graphique de*g*

a) Dresser le tableau de variation de la fonction *g*.
b) Représenter graphiquement la fonction *g* dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 2 cm).

4°) Calcul d'aire

Soit *a* un réel strictement supérieur à 1. On note D(*a*) le domaine du plan délimité par la courbe représentative de *g*, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$.

a) Soit *h* la fonction définie sur]0 ; +∞[par :

$$h(x)=\frac{(x+1)\ln(x+1)}{x}$$

Montrer que $h'(x)=\dfrac{1}{x}-g(x)$ et en déduire une primitive de *g* sur]0 ; +∞[.

b) Déterminer, en fonction de *a*, l'aire A(*a*) du domaine D(*a*) en cm².

c) Calculer $\lim\limits_{a\to+\infty} \mathrm{A}(a)$