Calcul matriciel et applications

I Définition d'une matrice, somme de 2 matrices et produit par un réel

1. Définition d'une matrice

Une matrice A de dimensions $m \times p$, avec m et p deux entiers naturels, est un tableau avec m lignes et p colonnes.
Pour $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq p$, on note a_{ij} le coefficient de la matrice A située à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ième colonne.

La matrice A sera donnée sous la forme A = $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{ip} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mp} \end{pmatrix}$

On notera la dimension de A : dim A.

2. Matrices particulières

- Une matrice ligne est une matrice qui ne comporte qu'une seule ligne.

Exemple : A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

- Une matrice colonne est une matrice qui ne comporte qu'une seule colonne.

Exemple : A = $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

- Une matrice carrée est une matrice qui comporte autant de lignes que de colonnes.

Exemple : A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3.

- La matrice nulle est une matrice dont tous les coefficients sont nuls. On notera A = 0.

- Une matrice diagonale est une matrice dont tous les coefficients autres que ceux d'une des deux diagonales sont nuls.

3. Somme de deux matrices

Définition

La somme de deux matrices de dimensions $m \times p$ est une matrice de dimensions $m \times p$ dont les coefficients sont obtenus en ajoutant les coefficients en même position.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Propriétés : Soit A, B et C trois matrices de même dimensions.

A + B = B + A on dit que l'opération est commutative.

(A + B) + C = A + (B + C) on dit que l'opération est associative.

A + 0 = A

4. Multiplication d'une matrice par un réel

Définition

Soit A une matrice et k un nombre réel.
La matrice $k \times$A est obtenu en multipliant tous les coefficients de A par k.

Propriétés

Soit A et B deux matrices de mêmes dimensions. Soit k et k' deux réels.

On a :

$k \times$A = A $\times k$. On dit que l'opération est commutative.
$k \times$(A + B) = $k \times$A + $k \times$B. On dit que l'opération est distributive par rapport à l'addition des matrices.
($k + k'$) $\times A = k \times$A + k' $\times$A. On dit que l'opération est distributive par rapport à l'addition des réels.
($k \times k'$) $\times A = k \times$(k' $\times$A). On dit que l'opération est associative.
0 $\times$A = 0

5. Différence de deux matrices

Définition

La matrice opposée de A est notée – A . C'est la matrice (– 1) $\times$A.
La différence de deux matrices A et B de mêmes dimensions est notée A – B. C'est la matrice
A + (– 1) $\times$B.

Propriétés

A + (– A) = 0
A + 0 = A

II Produit de matrices

1. Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soit A une matrice de dimensions $1 \times p$ et B une matrice de dimensions $m \times 1$.

La matrice produit A $\times$ B est le réel égal à $\sum_{i=1}^{p} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_p b_p$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times 1 + 3 \times 3 + (-1) \times (-2) = 2 + 9 + 2 = 13$$

2. Produit de deux matrices

Définition

Soit A une matrice de dimension $m \times p$ et B une matrice de dimension $p \times q$ avec q entier naturel non nul.
Le produit de la matrice A par la matrice B, noté A $\times$ B ou AB, est la matrice C de dimensions $m \times q$ telle que pour tout $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq q$ le coefficient c_{ij} est égal au produit de de la matrice de la ligne i de la matrice A par la matrice de la colonne j de la matrice B.

Exemple :

Soit A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et B = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, déterminons A $\times$ B.
On a dim A = 3 $\times$ 2 et dim B = 2 $\times$ 3 donc A $\times$ B existe et dim A $\times$ B = 3 $\times$ 3.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 7 \\ -3 & -2 & 1 \\ 6 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

avec par exemple $c_{22} = a_{21} \times b_{12} + a_{22} \times b_{22} = (-1)(2) = (0)(2) = -2$

Propriétés de la multiplication des matrices

Soit A, B et C trois matrices de même dimensions telles que toutes les sommes existent et tous les produits existent.

En général AB $\neq$ BA. Le produit de deux matrices, en général, n'est pas commutatif.
(AB)C = A(BC). Le produit des matrices est associatif.
A(B + C) = AB + AC et (A + B)c = AC + BC. Le produit des matrices est distributif par rapport à la somme des matrices.

Définition de la matrice identité et propriété

La matrice carrée d'ordre *p* notée I_p est la matrice dans laquelle tous les coefficients sont nuls sauf ceux de la diagonale principale qui valent 1 est appelée matrice identité d'ordre *p*.

Exemple : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour toute matrice carrée d'ordre p, on a $A \times I_p = I_p \times A = A$.

III Résolution de systèmes avec les matrices

1. Ecriture matricielle d'un système linéaire

Soit un système de *p* équations à *p* inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p$ donné sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \ldots + a_{pp}x_p = c_p \end{cases}$$

On pose :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pp} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_p \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_p \end{pmatrix}$$

Exemple :

$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 3x + 5y = 8 \end{cases}$ peut s'écrire sous la forme $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

2. Matrice inversible

Soit A une matrice carrée d'ordre *p*.
S'il existe une matrice A' carrée d'ordre *p* telle que $AA' = A'A = I_p$ alors on dit que A est inversible et que A' est la matrice inverse de A.
La matrice inverse de A, quand elle existe, est notée A^{-1}.

On a $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I_p$.

3. Détermination de la matrice inverse

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

On dit que A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

$ad - bc$ est appelé <u>déterminant</u> de la matrice A. On le note det A.

On a $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Pour les matrices carrées d'ordre supérieur ou égal à 3 il sera plus facile d'utiliser la calculatrice.

4. Résolution d'un système linéaire

On a $AX = C \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}C \Leftrightarrow X = A^{-1}C$.

<u>Exemple</u>

Résolution du système : $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a $AX = C \Leftrightarrow X = A^{-1}C$.

$\det A = (3)(1) - (2)(-2) = 7$

Comme $\det A \neq 0$ alors A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$.

D'où $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ -\frac{13}{7} \end{pmatrix}$

La solution du système est $S = \left\{\left(\frac{3}{7}; -\frac{13}{7}\right)\right\}$.

IV <u>Puissances d'une matrice carrée</u>

1. Puissances d'une matrice A

Soit A une matrice carrée d'ordre *p* et *n* un entier naturel non nul.
La puissance *n*-ième de A est la matrice d'ordre p définie par : $A^n = A \times A \times \ldots \times A$ (*n* fois).

Par convention $A^0 = I_p$.

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$

Cas particulier

Soit A une matrice carrée d'ordre *p*.
On dit que A est diagonalisable s'il existe une matrice carrée P d'ordre *p* inversible et une matrice diagonale D carrée d'ordre *p* telles que $A = PD P^{-1}$.

2. Propriétés des puissances de matrices carrées

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre *p*.

On a $A^m \times A^m = A^{m+n}$ et $(A^m)^n = A^{mn}$.

3. Formule du binôme de Newton

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre *p* telles que $A \times B$ soit commutatif.

Pour tout entier naturel *n* non nul, on a :

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} A^i \times B^{n-i}.$$

V Application des matrices aux processus aléatoires

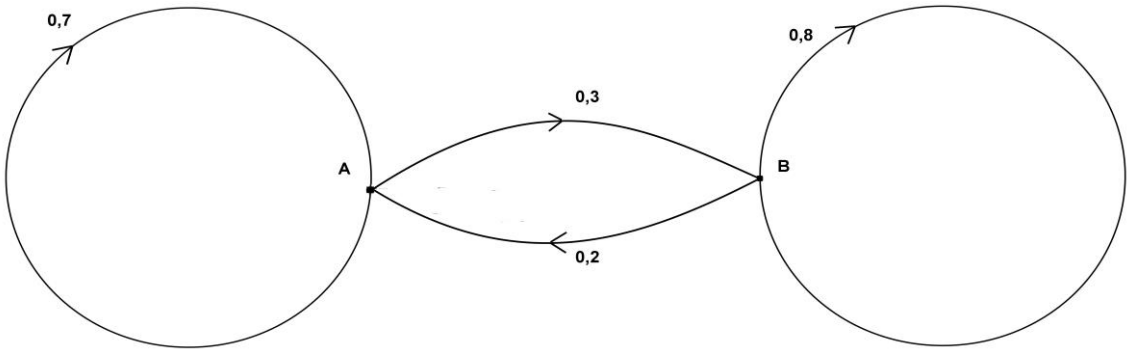
1. Définition

Soit *p* un entier naturel non nul.
Soit *i* et *j* deux entiers naturels tels que $1 \leq i \leq p$ et $1 \leq j \leq p$, le terme a_{ij} est la probabilité pour qu'un élément donné d'un processus passe à l'état *j* sachant qu'il était à l'état *i* à l'instant précédent.
Les termes a_{ij} sont les coefficients d'une matrice carrée d'ordre *p*.

Exemple :

Considérons deux prestateurs de service Actuel et Bidon nommés A et B.
70 % des abonnés restent chez A d'une année sur l'autre ;
80 % des abonnés restent chez B d'une année sur l'autre.

On peut représenter la situation à l'aide d'un graphe orienté :



La matrice associée au passage d'une année à l'autre est T définie par :

$T = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

Remarque : 0,7 + 0,3 = 0,2 + 0,8 = 1.

2. Passage d'un processus à l'état *n* avec *n* entier naturel

Si la répartition des éléments à l'état *n* est notée u_n avec *n* entier naturel et $u_n = (a_b \; b_n)$ avec $a_n + b_n = 1$

alors $u_{n+1} = u_n \times T$ et $u_n = u_0 \times T^n$.