Dérivation

I Rappels

1. Fonction dérivable

Définition

On dit que la fonction f est **dérivable** en a s'il existe un nombre réel l tel que :
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$.
l est appelé **nombre dérivé** de f en a.

2. Fonction dérivée

Définitions

- Une fonction f est dérivable sur un intervalle I lorsqu'elle est dérivable pour tout réel x de I.
- La fonction qui à tout x de I, où f est dérivable, est appelée **fonction dérivée**. On la note f '.

Dérivées usuelles

Fonction f	Ensemble de définition	Ensemble de dérivabilité	Fonction f '
$x \mapsto k$ avec k constante	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto ax+b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a$
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 2x$
$x \mapsto x^n$ n entier, $n \geq 1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}/\{0\}$	$\mathbb{R}/\{0\}$	$x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$	$]0\,;+\infty[$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Propriétés

Soit u et v deux fonctions définies et dérivables sur un même intervalle I.
Soit u' et v' les dérivées de u et de v.

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(ku)' = ku'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec v qui ne s'annule pas sur I.
- $(\dfrac{1}{u})' = -\dfrac{u'}{u^2}$ avec u qui ne s'annule pas sur I.

3. **Tangente à une courbe en un point**

Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I, dérivable en un réel a appartenant à I, et dont le nombre dérivé en a est $f'(a)$.

Une équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

4. **Dérivée et variation d'une fonction**

Théorème (admis)

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I alors f est décroissante sur I.

II Dérivées complémentaires

1. **Dérivée de la fonction** : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

Propriété

Soit u une fonction définie, positive et dérivable sur un intervalle I de dérivée u'.

Soit la fonction f définie sur I par $f(x) = \sqrt{u(x)}$.

La fonction f est dérivable pour tout réel x sur I tel que $u(x) > 0$ et on a $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

2. **Dérivée de la fonction** : $x \mapsto [u(x)]^n$

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de dérivée u' et n un entier naturel non nul.

Soit la fonction f définie sur I par $f(x) = [u(x)]^n$.

La fonction f est dérivable pour tout réel x sur I et on a $f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$.

3. **Dérivée de la fonction** : $x \mapsto f(ax+b)$

Propriété

Soit a et b deux nombres réels et f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

La fonction $x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable pour tout réel x sur I et on a $f'(x) = af'(ax+b)$.

4. **Généralisation**

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et de dérivée u'.

Soit g une fonction définie et dérivable sur l'intervalle J.

La fonction f définie par $f = g \circ u$ est dérivable pour tout x de I et $f'(x) = u'(x) \times g'[u(x)]$.