

I Exercice (sur 5 points) (spécialité + obligatoire)

Le tableau suivant donne le PNB ainsi que le nombre d'hôpitaux pour 1 million d'habitants dans quelques pays européens.

Pays	A	B	C	D	E	F	G	H
PNP, x en euros par habitant	5 100	7 800	11 200	15 800	20 100	26 230	28 910	31 910
Nombre y d'hôpitaux par million d'habitants	620	1 080	1 550	2 100	3 000	3 800	4 200	4 400

1) Représenter le nuage de points associé à la série (x;y).

(Unités : en abscisse : 1 cm pour 1000 euros., en ordonnée : 1 cm pour 200 hôpitaux).

On prendra pour origine le point M_0 (5000 ; 600). On appelle G le point moyen de ce nuage.

2) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y (donné la valeur décimale arrondi à 10^{-3} près).

(Tous les calculs intermédiaires sont demandés).

On admet qu'un ajustement affine par la méthode des moindres carrés est justifié, donner une équation de la droite (D) de régression de y en x. Tracer (D) dans le repère ci-dessus.

3) Un pays a un PNB de 23.400 euros, quelle estimation peut-on faire du nombre d'hôpitaux dans ce pays ?

II Exercice (sur 5 points) (obligatoire)

Neufs amis, cinq garçons et quatre filles, décident de tirer au sort deux conducteurs, qui devront rester sobres durant une soirée.

Chacun écrit son nom sur un carton glissé ensuite dans une boîte.

L'un d'entre eux extrait au hasard, **successivement** et **sans remise** deux cartons de la boîte.

On définit les événements G_1 , G_2 , F_1 et F_2 par :

G_1 : "Un garçon est désigné au premier tirage" ;

G_2 : "Un garçon est désigné au deuxième tirage" ;

F_1 : "une fille est désignée au premier tirage" ;

F_2 : "une fille est désignée au deuxième tirage".

1) Calculer la probabilité que le nom d'une fille apparaisse au deuxième tirage sachant que le nom d'un garçon a été lu sur le premier carton.

Calculer la probabilité de l'événement $G_1 \cap F_2$.

La comparer à celle de l'événement $G_2 \cap F_1$.

2) Calculer la probabilité qu'il y ait deux conductrices en fin de soirée.

3) Calculer la probabilité que le sort désigne une fille au deuxième tirage.

4) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de filles désignées

Déterminer la loi de probabilité de X .

Calculer son espérance mathématique $E(X)$.

II Exercice (sur 5 points) (spécialité)

Pour financer ses études, une étudiante fait du démarchage par téléphone pour vendre un produit qui lui rapporte 20 francs. Elle ne peut vendre qu'un produit par appel.

Lorsqu'elle compose un numéro de téléphone, trois possibilités se présentent :

L' événement A : "personne ne répond" de probabilité $p(A)$ égale à **0,3** ;

l'événement B : "le répondeur téléphonique diffuse un message" avec une probabilité $p(B)$ égale à **0,1** ;

l'événement C : "un correspondant répond" de probabilité $p(C)$ égale à **0,6**.

1) la probabilité que l'étudiante vende son produit sachant qu'un correspondant répond à son appel est égale à **0,4**.

Les probabilités qu'elle vende son produit dans les autres cas sont nulles.

Vérifier que la probabilité pour que l'étudiante réalise une vente lors d'un appel téléphonique, fait au hasard, est égale à **0,24**.

2) Lorsque personne ne répond à son appel téléphonique, l'étudiante débourse **0** franc.

Lorsqu'un répondeur téléphonique diffuse son message, l'étudiante débourse **1** franc

Lorsqu'un correspondant répond, l'appel coûte 1 franc et dans ce cas :

- Si l'étudiante vend son produit, qui lui rapporte 20 francs, elle a donc fait un gain de **+19** francs.

- Si elle ne vend pas son produit, elle aura perdu 1 franc.

On considère la variable aléatoire X correspondant au gain algébrique possible lors d'un appel téléphonique de l'étudiante.

a) démontrer que la probabilité que le gain algébrique soit égal à **-1** est **0,46**

b) déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

c) calculer l'espérance mathématique de X .

3) On suppose que l'étudiante compose successivement de manière indépendante 5 numéros de téléphone au hasard. Déterminer la probabilité qu'elle réalise exactement trois ventes.

III Problème (sur 10 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal. On prendra pour unité graphique 2 cm.

On considère les fonctions f et g définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = (-x + 4)e^{x-1} \text{ et } g(x) = \ln\left(\frac{x+6}{2x+2}\right)$$

Dans le repère choisi, on appelle (C) la courbe représentative de f et (C') la courbe représentative de g .

Partie A

1) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$

2) Vérifier que la fonction dérivée de f est définie pour tout x positif par :

$$f'(x) = (-x + 3)e^{x-1}$$

3) Etudier le sens de variation de f et dresser le tableau de variation de f .

On précisera $f(0)$, $f'(0)$, $f(3)$, $f'(3)$.

4) Tracer la courbe (C) .

5) Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $F(x) = (ax + b)e^{x-1}$ soit une primitive de la fonction f .

Partie B

On considère la fonction u définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$u(x) = \frac{x+6}{2x+2}$$

- 1) Vérifier que pour tout x positif, $u(x)$ est strictement positif.
- 2) a) Déterminer la limite de $u(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
b) Étudier le sens de variation de u .
Dresser le tableau de variation de u et retrouver le résultat de la question 1 de la partie B.
- 3) En utilisant les résultats de la question précédente, déterminer le sens de variation de la fonction g et démontrer que la courbe (C') admet une asymptote (D) au voisinage de $+\infty$ dont on donnera une équation.
- 4) Tracer la courbe (C') et la droite (D) sur le même graphique que celui de la partie A.
- 5) Soit G la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$G(x) = (x+6)\ln(x+6) - (x+1)\ln(2x+2)$$

Démontrer que G est une primitive de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Partie C

- 1) Résoudre à l'aide des représentations graphiques faites en partie A et B, l'inéquation $g(x) \leq f(x)$.
- 2) Calculer l'aire A en cm^2 du domaine du plan constitué des points $M(x;y)$ tels que :

$$2 \leq x \leq 3 \quad \text{et} \quad g(x) \leq y \leq f(x).$$

Donner la valeur exacte de A et la valeur approchée à 10^{-3} près.