

Thèmes : Statistiques, probabilité, exponentielle

I Exercice (sur 5 points) **Obligatoire + Spécialité**

Le tableau ci-dessous donne l'évolution des surfaces cultivées en avoine (en milliers d'hectares) en France de 1980 à 2000.

Années	1980	1985	1990	1995	2000
Rang de l'année x_i	0	5	10	15	20
Superficie en milliers d'hectares, y_i	805	629,7	534,3	431	218

- 1) Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i) dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphiques : 0,5 cm pour 1 unité en abscisse, 2 cm pour 100 milliers d'hectares en ordonnée).
- 2) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y **en détaillant tous les calculs**. Un ajustement affine est-il justifié ?
- 3) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés (les valeurs seront arrondies au millième).
- 4) Quelle estimation, en milliers d'hectares, de la surface cultivée en avoine en 2001 peut-on faire ?

II Exercice (sur 5 points) **Spécialité**

Une association envoie des ours en peluche à un hôpital pour des enfants malades répartis dans deux pavillons.

Chaque pavillon reçoit deux cartons :

- Le carton A contient 5 ours bruns et 5 ours blancs.
- Le carton B contient 3 ours bruns et 5 ours blancs.

- 1) Dans l'un des pavillons, une infirmière extrait du carton B, simultanément et au hasard 3 ours pour les enfants d'une même chambre.
Calculer la probabilité que :
 - a) Les 3 ours soient de la même couleur
 - b) L'un au moins des ours soit brun
- 2) Dans l'autre pavillon, un enfant choisit un carton au hasard et prend, toujours au hasard, un ours dans ce carton.
 - a) Calculer la probabilité que cet ours soit blanc et provienne du carton A
 - b) Calculer la probabilité que cet ours soit blanc et provienne du carton B

- c) En déduire que la probabilité de choisir un ours blanc est égale à $\frac{7}{16}$
- d) L'enfant a pris un ours blanc, quelle est la probabilité que cet ours provienne du carton A ?

II Exercice (sur 5 points) Obligatoire

Une caisse contient deux types de tablettes de chocolat : des tablettes de chocolat au Lait et des tablettes de chocolat noir.

Certaines tablettes contiennent un bon pour recevoir un cadeau :

- parmi les tablettes de chocolat au lait, 12 % contiennent un bon ;
- parmi les tablettes de chocolat noir, 15 % contiennent un bon,

Dans la caisse, deux tablettes sur trois sont des tablettes de chocolat au lait.

On prend au hasard une tablette de chocolat dans cette caisse.

Tous les tirages sont équiprobables.

On considère les événements suivants :

L : " la tablette obtenue est une tablette de chocolat au **lait**";

N : " la tablette obtenue est une tablette de chocolat **noir**";

B : " la tablette obtenue contient un **bon**";

- 1)
 - a) Traduire l'énoncé en donnant $p(L)$ et $p(N)$.
 - b) Donner les probabilités $p(B/N)$ et $p(B/L)$
- 2) Déterminer la probabilité $p(\bar{B} / N)$ où $\bar{B}$ représente l'événement contraire de B.
- 3)
 - a) Déterminer la probabilité que la tablette obtenue soit une tablette de chocolat au lait contenant un bon.
 - b) Déterminer la probabilité que ce soit une tablette de chocolat noir contenant un bon.
 - c) En déduire la probabilité que la tablette obtenue permette de recevoir un cadeau.
- 4) La tablette obtenue contient un bon. Quelle est la probabilité que ce soit une tablette de chocolat au lait ?

III Problème (sur 10 points)

Une entreprise fabrique des objets P. On note x le nombre d'objets fabriqués, exprimé en milliers. Pour des raisons d'approvisionnement, x appartient à l'intervalle $[0; 3,5]$. On note $C(x)$ le coût de fabrication exprimé en millions de francs. On définit une fonction coût marginal M par $M(x) = C'(x)$, où C' désigne la fonction dérivée de C . On définit une fonction

coût moyen C_m par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$

Partie A :

On suppose que, pour cette production, le coût marginal est défini par :

$$M(x) = 1 + \frac{x-3}{8} e^x$$

- 1) On désigne par M' la fonction dérivée de M . Calculer $M'(x)$. Déterminer le signe de $M'(x)$, et en déduire le sens de variation de M sur $[0; 3,5]$. En déduire que M est strictement positive sur l'intervalle $[0; 3,5]$.
- 2) On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 3,5]$ par :

$g(x) = \frac{ax+b}{8}e^x$, où a et b sont deux réels. Déterminer a et b pour que la dérivée g' soit définie par $g'(x) = \frac{x-3}{8}e^x$. En déduire la primitive de M sur [0; 3,5] qui s'annule pour x= 0.

Partie B :

On définit la fonction coût C par $C(x) = x + \frac{x-4}{8}e^x + \frac{1}{2}$

- 1) Vérifier que, pour tout x de l'intervalle [0; 3,5], $C'(x) = M(x)$. Dresser le tableau de variation de C.
- 2) Tracer la courbe représentative (C) de C dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'origine O. On prendra en abscisses 2 cm pour représenter un millier d'objets, et en ordonnées, 5 cm pour représenter un million de francs.

Partie C :

On désigne par A, un point d'abscisse x sur la courbe (C), et par D_x la droite OA.

- 1) Pourquoi le coefficient directeur de D_x est-il égal à $C_m(x)$?
- 2) Tracer les droites D_1 et D_2 correspondant respectivement à x=1 et à x=2. Quelle est celle qui a le plus petit coefficient directeur ?
- 3) Par une lecture graphique, déterminer à la centaine près le nombre d'objets à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal.
- 4) On sait en économie que le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.
 - a) Montrer que résoudre l'équation $C_m(x) = M(x)$ revient à résoudre l'équation $(x-2)^2e^x - 4 = 0$
 - b) On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle [0; 3,5] par $f(x) = (x-2)^2e^x - 4$. Etudier les variations de f, et en déduire que, sur l'intervalle [0; 3,5], l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution strictement positive dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3} .
 - c) En déduire le nombre d'objets à fabriquer pour que le coût moyen soit minimal.

Pour les élèves qui n'ont pas pris Math en spécialité : I + II + III

Pour les élèves qui ont pris Math en spécialité : I + II (spécialité) + III