

Thèmes : Intégrales, dénombrement, exponentielle

I Exercice (sur 5 points)

Calculer les intégrales suivantes :

$$1) \quad I = \int_3^4 \frac{3x}{4-x^2} dx$$

$$2) \quad I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

$$3) \quad I = \int_0^1 5 e^{-2x} dx$$

$$4) \quad I = \int_{-1}^0 \frac{2e^x}{1+e^x} dx$$

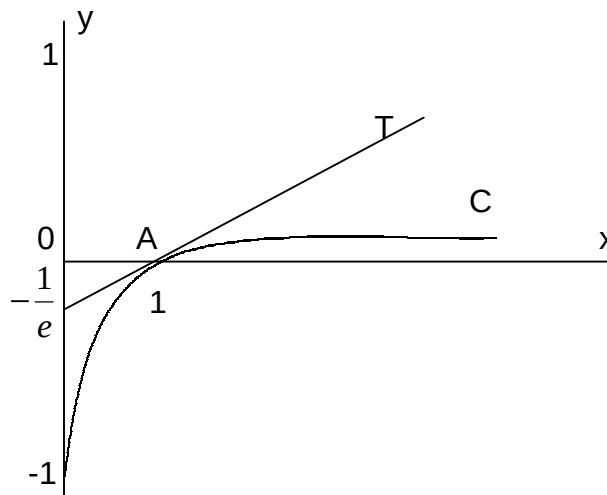
II Exercice (sur 5 points) **Spécialité**

- 1) On considère un jeu de 32 cartes (du 7 à l'as avec 4 couleurs : trèfle, carreau cœur et pique). On tire 5 cartes simultanément, combien existe-t-il de tirages comportant exactement :
 - a) Un roi et deux valets ?
 - b) Deux as, un trèfle et un carreau ?

- 2) On organise une course cycliste avec 10 participants numérotés de 1 à 10.. On considère qu'il n'y aura jamais d'ex aequo.
 - a) combien existe-t-il de classements des 3 premiers ?
 - b) combien existe-t-il de classements des 10 coureurs ?
 - c) combien existe-t-il de classements avec le 2 premier ou dernier ?

II Exercice (sur 5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(0; \vec{i}; \vec{j})$. La courbe C ci-après représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$, où a et b sont deux nombres que l'on se propose de déterminer en utilisant les informations lues sur la figure.



- 1) Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f.

- 2) En utilisant les coordonnées de A, trouver une relation entre a et b.
- 3) En utilisant une autre propriété graphique, déterminer une autre relation entre a et b. En déduire que $f(x) = (x-1)e^{-x}$

III Problème (sur 10 points)

Partie A - On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 - 2 \ln x + 2$$

- 1) Calculer $g'(x)$ où g' désigne la fonction dérivée de g, et dresser le tableau de variation de g (l'étude des limites n'est pas demandée).
- 2) Déduire du 1) le signe de g sur $]0; +\infty[$.

Partie B - On considère maintenant la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2 \ln x}{x} + x - 1$$

- 1) a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, en déduire le signe de $f'(x)$ et donner le sens de variation de f.
 - b) Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. Interpréter le résultat obtenu en 0.
 - c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
 - d) Donner la valeur exacte puis la valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de $f(\frac{1}{e})$, $f(\frac{1}{2})$, $f(2)$, $f(e)$, $f(4)$.
- 2) On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan P rapporté à un repère orthonormal (unité 2 cm).
 - a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à (D).
 - b) Construire (C) et (D).
 - c) Déterminer la fonction dérivée de la fonction h définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = (\ln x)^2$$
 - d) Calculer l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par C, D et les droites d'équations $x=1$ et $x=2$. On donnera la valeur exacte et la valeur approchée au mm^2 près.

Pour les élèves qui n'ont pas pris Math en spécialité : I + II + III

Pour les élèves qui ont pris Math en spécialité : I + II (spécialité) + III