

Terminale ES : sujet 4

Thèmes : Logarithmes, primitives, suites, fonctions rationnelles.

I Exercice (spécialité et obligatoire) sur 5 points

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- 1) $\ln(2x - x^2) = \ln x^2$ 2) $\ln(x + 3) + \ln(5 - x) > \ln(x^2 + x - 2)$
3) $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) > \ln(x^2 - 1)$ 4) $(\ln x)^2 + 3\ln x + 2 \leq 0$

II Exercice (obligatoire) sur 5 points

Soient les fonctions f définies ci-dessous. Pour chaque fonction déterminer une primitive sur l'intervalle I .

- 1) $f(x) = \frac{-5x}{(x^2 + 1)^2}$ $I =]-\infty; +\infty[$ 2) $f(x) = (x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 7}$ $I =]-\infty; +\infty[$
3) $f(x) = \frac{-6x - 3}{(x^2 + x + 1)^3}$ $I =]-\infty; +\infty[$ 4) $f(x) = (2x - 1)\sqrt{x + 1}$ $I = [0; +\infty[$

III Exercice (spécialité) sur 5 points (partie A et B)

Partie A – Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 900$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 0,6 u_n + 200$$

- 1) Calculer u_1 et u_2 .
2) On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = u_n - 500$$

- a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.
- b) Exprimer (v_n) en fonction de n . En déduire que $u_n = 400 \times (0,6)^n + 500$

Partie B – Application économique

Dans un pays, deux sociétés A et B se partagent le marché des télécommunications. Les clients souscrivent, le 1^{er} janvier, auprès soit de A, soit de B, un contrat d'un an au terme duquel ils sont libres à nouveau de choisir A ou B. Cette année 2000, la société A détient 90% du marché et la société B, qui vient de se lancer, 10%. On estime que, chaque année, 20% de la clientèle de A change pour B, et de même 20% de la clientèle de B change pour A. On considère une population représentative de 1000 clients de l'année 2000. Ainsi, 900 sont clients de la société A et 100 sont clients de la société B. On veut étudier l'évolution de cette population les années suivantes.

- a) Vérifier que la société A compte 740 clients en 2001. Calculer le nombre de clients de A en 2002.
- b) On note a_n le nombre de clients de A l'année $(2000+n)$.
Vérifier que $a_{n+1} = 0,8a_n + 0,2(1000 - a_n)$. En déduire que $a_{n+1} = 0,6 a_n + 200$.

Problème (sur 10 points)

Soit la fonction f de la variable réelle x définie par : $f(x) = \frac{2x^2 + x + 2}{x^2 - x - 2}$ et (C_f) sa courbe représentative placée dans un repère orthonormal d'unité le cm.

- 1) Donner le domaine de définition de f noté D_f .
- 2) Déterminer 3 réels a , b et c tels que pour tout x de D_f , $f(x)$ puisse se mettre sous la forme : $f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-2}$
- 3) Etudier les limites de f aux bornes de D_f . On précisera les différentes asymptotes.
- 4) Etudier la position de (C_f) par rapport à son asymptote horizontale.
- 5) Calculer $f'(x)$ et déterminer le sens de variation de f .
- 6) Donner le tableau de variation de f .
- 7) Donner une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 1.
- 8) Tracer la courbe (C_f) ainsi que la tangente (T) .

