

Terminale ES : sujet 3

Thèmes : Logarithmes, bijections, fonctions, suites

(calculatrice autorisée)

I Exercice (sur 5 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ (on pourra poser $X=x^2$)
En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

a) $(\ln x)^4 - 10(\ln x)^2 + 9 = 0$ b) $\ln(10 - x^2) = 2 \ln 3 - \ln x^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln[(x-1)(x-4)] < \ln(-3x+7)$ b) $\ln(x-1) + \ln(x-4) < \ln(-3x+7)$

II Exercice (sur 5 points) Spécialité

En 1995, Alain Peau a fait sa première déclaration d'impôts sur le revenu : il a déclaré un revenu annuel de 90 000 F, l'impôt correspondant s'est élevé à 8 000 F et son revenu après impôt a donc été de 82 000 F.

Chacune des quatre années suivantes, son revenu annuel a augmenté de 2 % et l'impôt correspondant a augmenté de 3 %.

Alain Peau souhaite étudier ce qu'il adviendrait de son revenu après paiement de l'impôt si l'évolution constatée se poursuivait.

Dans ce but, on suppose que l'évolution constatée se poursuit et, pour tout entier n positif ou nul, on note :

- R_n le montant, exprimé en francs, du revenu annuel de Alain Peau en l'an $(1995+n)$;
- I_n le montant, exprimé en francs, de l'impôt correspondant;
- $U_n = R_n - I_n$, le revenu après impôt.
($R_0 = 90\,000$ $I_0 = 8\,000$ $U_0 = 82\,000$)

- 1) a) Calculer $R_1, I_1, U_1, R_2, I_2, U_2$.
b) Déterminer R_n et I_n en fonction de n .

- 2) a) Montrer que pour tout entier positif n ,

$$U_{n+1} - U_n = 1800 (1,02)^n - 240 (1,03)^n$$

b) Montrer que :

$$U_{n+1} < U_n \text{ équivaut à } n \ln\left(\frac{1,03}{1,02}\right) > \ln\left(\frac{15}{2}\right)$$

c) Déterminer les entiers positifs n qui vérifient

$$n \ln\left(\frac{1,03}{1,02}\right) > \ln\left(\frac{15}{2}\right)$$

- 3) Si l'évolution que Alain Peau a constatée concernant son revenu et l'impôt correspondant se poursuit, Alain Peau verra-t-il son revenu après impôt diminuer ?

II Exercice (sur 5 points)

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation $x^3 + x + 80 = 0$.

Pour cela, on se propose d'étudier la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x + 80$

- 1) Déterminer les limites de f
- 2) Déterminer $f'(x)$ et donner le sens de variation de f .
- 3) Donner le tableau de variation de f
- 4) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur $\mathbb{R}$.
- 5) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près par défaut.

III Problème (sur 10 points)

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x^2 - 1}{2x}$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan P rapporté à un repère orthonormal (unité 2 cm).

- 1) Etude d'une fonction auxiliaire.

On introduit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = x^2 + 3 - 2 \ln x$$

- a) Etudier le sens de variation de g .
- b) En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

On ne demande pas de construire la courbe représentative de g .

- 2) Etude de la fonction f .

- a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Quelle est sa conséquence graphique ?

- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

- c) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{2x^2}$

En déduire le sens de variation de f .

- d) Donner le tableau de variation de f .

- e) Soit (D) la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x$. Interpréter graphiquement la

différence $f(x) - \frac{1}{2}x$ puis l'exprimer en fonction de x .

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \frac{1}{2}x)$. Quelle est la conséquence graphique ?

Etudier la position relative de (C) et de (D).

- f) Tracer (D) et (C).

Pour les élèves qui ont pris Math en spécialité : I + II (spécialité) + III