

Terminale ES

I Exercice (spécialité et obligatoire) sur 5 points

Calculer les intégrales suivantes :

$$1) I = \int_2^3 \frac{\ln x}{x} dx \quad 2) I = \int_1^2 e^{2x-1} dx \quad 3) I = \int_3^4 \frac{x}{4-x^2} dx \quad 4) I = \int_1^0 (x-2)(x^2-4x+5)^2 dx$$

II Exercice (obligatoire) sur 5 points

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{x-1} - 3 = 2$

b) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

c) $\frac{e^x + 2}{e^x - 2} < 2$

d) $3e^{3x} + e^{2x} - 2e^x \leq 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} e^x e^y = e^3 \\ \frac{e^{2x}}{e^{3y}} = \frac{1}{e^3} \end{cases}$$

II Exercice (spécialité) sur 5 points

1) On dispose d'un jeu de 32 cartes. Combien peut-on constituer de mains de 5 cartes contenant :

- a) Exactement un roi
- b) Exactement deux valets
- c) Aucun roi
- d) Au moins un as
- e) Deux carreaux, trois trèfles
- f) Deux cœurs et un as (exactement)

2) Un magasin propose au même prix deux types de cadenas à combinaisons :

- le premier comporte 5 roues de 7 chiffres
- le deuxième comporte 7 roues de 4 chiffres

Lequel de ces deux cadenas offre le plus de combinaisons ?

III Problème (sur 10 points)

Une entreprise fabrique des objets P. On note x le nombre d'objets fabriqués, exprimé en milliers. Pour des raisons d'approvisionnement, x appartient à l'intervalle $[0 ; 3,5]$.

On note $C(x)$ le coût de fabrication exprimé en millions de francs.

On définit une fonction coût marginal par $M(x) = C'(x)$. (C' désigne la fonction dérivée de C .)

On définit une fonction coût moyen par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$

On suppose que, pour cette production, le coût marginal est défini par :

$$M(x) = 1 + \frac{x-3}{8}e^x$$

1. M' désignant la fonction dérivée de la fonction M , calculer $M'(x)$. Déterminer le signe de $M'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction M sur l'intervalle $[0 ; 3,5]$. En déduire que M est strictement positive sur l'intervalle $[0 ; 3,5]$.
2. a et b étant deux réels, on désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 3,5]$ par:

$$g(x) = \frac{ax+b}{8}e^x$$

Déterminer a et b pour que la dérivée g' soit définie par :

$$g'(x) = \frac{x-3}{8}e^x$$

En déduire la primitive de la fonction M qui s'annule pour $x = 0$.

Partie B

On définit la fonction coût par : $C(x) = x + \frac{x-4}{8}e^x + \frac{1}{2}$

1. Vérifier que, pour tout x de l'intervalle $[0; 3,5]$, $C'(x) = M(x)$. Dresser le tableau de variations de la fonction C .
2. Tracer la courbe représentative (Γ) de la fonction C dans le plan rapporté à un repère orthogonal d'origine O . (On prendra en abscisses 2 cm pour représenter un millier d'objets et, en ordonnées, 5 cm pour représenter un million de francs.)

Partie C

On désigne par A un point d'abscisse x sur la courbe (Γ) et par D_x la droite $\{OA\}$.

1. Pourquoi le coefficient directeur de la droite D_x est-il égal à $C_m(x)$?
2. Tracer les droites D_1 et D_2 correspondant à $x = 1$ et à $x = 2$. Quelle est celle qui a le plus petit coefficient directeur ?
3. Par une lecture du graphique, déterminer à la centaine près le nombre d'objets à fabriquer pour que le coût moyen soit minimum.
4. On sait en économie que le coût moyen est minimal lorsqu'il est égal au coût marginal.
 - a. Montrer que résoudre l'équation $C_m(x) = M(x)$ revient à résoudre l'équation

$$(x-2)^2e^x - 4 = 0$$

- b. On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 3,5]$ par :

$$f(x) = (x-2)^2e^x - 4.$$

Étudier les variations de f et en déduire que, sur l'intervalle $[0 ; 3,5]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution strictement positive dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-3} .

- c. En déduire le nombre d'objets à fabriquer pour que le coût moyen soit minimum.