

Devoir de TES

I Exercice (spécialité et obligatoire) sur 5 points

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $e^{x-1} - 3 = -1$

b) $e^{2x} + e^x - 6 = 0$

c) $\frac{e^x + 1}{e^x - 1} < 2$

d) $3e^{3x} + e^{2x} - 2e^x \leq 0$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} e^x e^y = e^2 \\ \frac{e^{2x}}{e^{3y}} = \frac{1}{e^2} \end{cases}$$

II Exercice (obligatoire) sur 5 points

Le plan est muni d'un repère d'origine O.

1) Soit (C) la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]-\frac{1}{3}; 1[$

Par : $g(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$ où a, b et c sont des nombres réels.

La courbe (C) passe par le point O. Elle admet en ce point une tangente de coefficient directeur 2 et coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse $\frac{2}{3}$.

Traduire ces conditions et déterminer a, b et c.

2) Montrer que pour tout x de $]-\frac{1}{3}; 1[$, $-3x^2 + 2x + 1$ est strictement positif.

3) Etudier le sens de variation de g sur l'intervalle $]-\frac{1}{3}; 1[$.

II Exercice (spécialité) sur 5 points

1) Dans une association comportant 30 membres, on doit élire un bureau comportant : un président, un trésorier et une secrétaire. Combien peut-on élire de bureaux différents ?

2) Soit le mot TRAVAIL, combien peut-on écrire d'anagrammes de ce mot ?

3) Existe-t-il un entier naturel n tel que : $A_n^1 + A_n^3 = 9$

4) Paul Delaine a 7 paires de chaussettes (de couleurs différentes). Paul doit les ranger dans 5 tiroirs. De combien de façons peut-il ranger ses paires de chaussettes ?

III Problème (sur 10 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra pour unités graphiques :
2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ;
10 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées.

Question préliminaire

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$$

- 1) Vérifier que $g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$
- 2) En déduire selon les valeurs de x le signe de $g(x)$.

Étude de la fonction f

- a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ ainsi que la limite de f en $-\infty$.
 - b) La fonction dérivée de f est notée f' . Montrer que pour tout réel x , $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
- 2)
 - a) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Donner le tableau de variation de f .
 - b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[-\frac{9}{2}; -4]$.
 - c) Montrer que pour tout x de l'intervalle $[-\ln 2; \ln 2]$, $f(x)$ est positif.
- 3)
 - a) Montrer que la droite (D_1) d'équation $y = \frac{2}{9}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$. Étudier la position relative de la courbe (C) et de la droite (D_1) .
 - b) Montrer que la droite (D_2) d'équation $y = \frac{2}{9}x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. Étudier la position relative de la courbe (C) et de la droite (D_2) .
- 4) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes.

Pour les élèves qui n'ont pas pris Math en spécialité : I + II + III

Pour les élèves qui ont pris Math en spécialité : I + II (spécialité) + III