

Problème

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{2}{9}x$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra pour unités graphiques :

2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ;

10 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées.

A. Question préliminaire

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$$

- 1) Vérifier que $g(x) = (2e^x - 1)(e^x - 2)$
- 2) En déduire selon les valeurs de x le signe de $g(x)$.

B. Étude de la fonction f

- 1)
 - a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$ ainsi que la limite de f en $-\infty$.
 - b) La fonction dérivée de f est notée f' . Montrer que pour tout réel x , $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
- 2)
 - a) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Donner le tableau de variation de f .
 - b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique a dans l'intervalle $[-\frac{9}{2}, -4]$.
 - c) Montrer que pour tout x dans l'intervalle $[-\ln 2; +\ln 2]$, $f(x)$ est positif.
- 3)
 - a) Montrer que la droite (D_1) d'équation $y = \frac{2}{9}x + 1$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$, Étudier la position relative de la courbe (C) et de la droite (D_1) .
 - b) Montrer que la droite (D_2) d'équation $y = \frac{2}{9}x$ est asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. Étudier la position relative de la courbe (C) et de la droite (D_2) .
- 4) Tracer la courbe (C) et ses asymptotes.