

I Exercice (spécialité et obligatoire) sur 5 points

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1) \ln(2x - x^2) = \ln x^2 & 2) \ln(x+3) + \ln(5-x) > \ln(x^2 + x - 2) \\ 3) \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) > \ln(x^2 - 1) & 4) (\ln x)^2 + 3\ln x + 2 \leq 0 \end{array}$$

II Exercice (obligatoire) sur 5 points

Madame A dispose d'une somme de 5 000 € qu'elle veut faire fructifier.

On lui propose deux types de placements.

Type I : Le capital est augmenté chaque année de 500 €.

Type II : Le capital est augmenté chaque année de 7 % du capital de l'année précédente.

1) Placement de type I

On note U_n le capital en euros à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année ($U_0 = 5\,000$).

- Calculer U_1 et U_2 .
- Exprimer U_n en fonction de n .

2) Placement de type II

On note V_n le capital en euros à la fin de la $n^{\text{ième}}$ année ($V_0 = 5\,000$).

- Calculer V_1 et V_2 .
- Exprimer V_n en fonction de n .

3) Comparaisons

Quel est le type de placement le plus avantageux pour Madame A,

- si elle compte retirer son argent à la fin de la 8^{ième} année ?
 - si elle compte retirer son argent à la fin de la 12^{ième} année ?
- (justifier les réponses fournies)

II Exercice (spécialité) sur 5 points

Madame X décide de verser 5 000 €, chaque année, le 31 décembre, sur un compte assurance-vie, à partir de l'année 2001. Toutes les sommes déposées sont rémunérées au taux annuel de 5 %, à intérêts composés, ce qui signifie que chaque année, les intérêts sont ajoutés au capital le 31 décembre et produisent à leur tour des intérêts.

On désigne par C_n (n entier positif ou nul) le capital, exprimé en euros, dont Madame X dispose sur son compte au 1^{er} janvier de $(2002 + n)$. On a donc $C_0 = 5000$.

- Montrer que le capital acquis au 1^{er} janvier de 2003 est 10 250 €.
 - Etablir que, pour tout entier n positif ou nul, $C_{n+1} = 1,05 C_n + 5\,000$.
- On pose $U_n = C_n + 100\,000$, pour n entier positif ou nul. Etablir une relation entre U_{n+1} et U_n . En déduire que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
 - Exprimer U_n en fonction de n puis C_n en fonction de n .
 - En quelle année, le capital acquis dépassera-t-il 200 000 € pour la première fois ?

III Problème (sur 10 points)

On se propose d'étudier la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = -x + 5 - 2 \frac{\ln x}{x}$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan P rapporté à un repère orthonormal (unité 1 cm).

1) Etude d'une fonction auxiliaire.

On introduit la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = -x^2 - 2 + 2 \ln x$$

a) Etudier le sens de variation de g . Calculer $g(1)$.

b) En déduire le signe de g sur $]0; +\infty[$.

On ne demande pas de construire la courbe représentative de g .

2) Etude de la fonction f .

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Quelle est la conséquence graphique ?

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$

En déduire le sens de variation de f .

d) Donner le tableau de variation de f .

e) Soit (D) la droite d'équation $y = -x + 5$. Interpréter graphiquement la différence $f(x) - (-x + 5)$ puis l'exprimer en fonction de x .

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x - 5)$. Quelle est la conséquence graphique ?

Etudier la position relative de (C) et de (D).

f) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique a sur $[1 ; 5]$.

g) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x = 2$.

h) Tracer (D), (T) et (C).

Pour les élèves qui n'ont pas pris Math en spécialité : I + II + III

Pour les élèves qui ont pris Math en spécialité : I + II (spécialité) + III