

Devoir de Mathématiques : Terminale ES

I Exercice (sur 5 points) (spécialité et obligatoire)

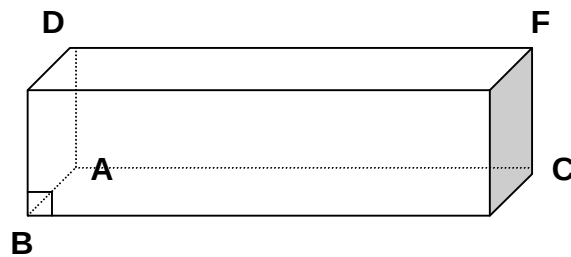
1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ (on pourra poser $X=x^2$)
En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ des équations suivantes :

a) $(\ln x)^4 - 10(\ln x)^2 + 9 = 0$ b) $\ln(10 - x^2) = 2 \ln 3 - \ln x^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a) $\ln [(x-1)(x-4)] < \ln (-3x+7)$ b) $\ln (x-1) + \ln (x-4) < \ln (-3x+7)$

II Exercice (sur 5 points) (spécialité)



La figure ci-dessus est un parallélépipède.

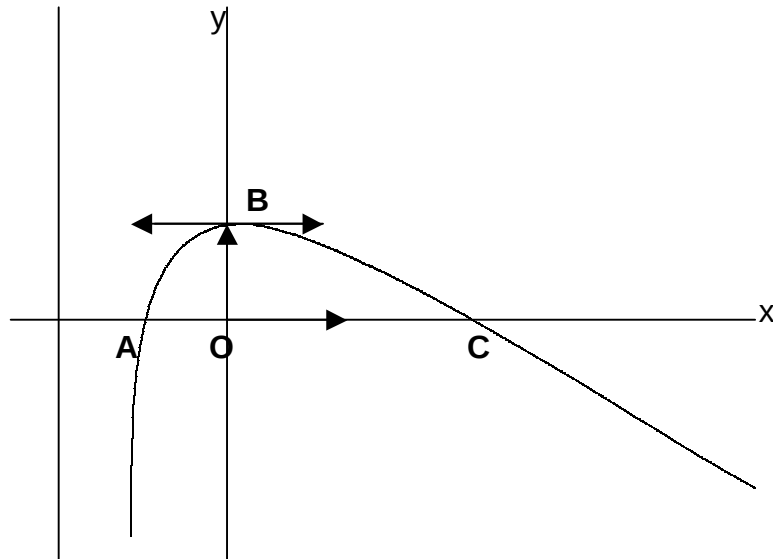
L'espace est rapporté à un repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec $\vec{i} = \frac{1}{2} \vec{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{5} \vec{AC}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2} \vec{AD}$.

On a $\|\vec{AB}\| = 2$ cm, $\|\vec{AC}\| = 5$ cm et $\|\vec{AD}\| = 2$ cm.

- 1) Démontrer que le repère $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormal.
- 2) Soit I le milieu du segment [DF], déterminer les coordonnées de I.
- 3) Déterminer une équation cartésienne du plan passant par I, B et C.
- 4) Déterminer la distance du point F au plan (IBC).

II Exercice de (sur 5 points) (obligatoire)

Soit la courbe définie ci-dessous. Elle représente dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ une fonction f définie et dérivable sur $] -2; +\infty[$



On admet que :

- Les coordonnées de A, B et C sont entières.
- La courbe passe par les points A, B et C.
- La tangente en B est parallèle à l'axe des abscisses.
- La limite de f en -2 et en $+\infty$ est $-\infty$.

1) Dans cette question, on demande de justifier les réponses.

- a) Calculer $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$ puis $f'(0)$.
- b) Donner le signe de $f(x)$ puis de $f'(x)$ sur $] -2; +\infty[$

2) On définit sur $] -2; +\infty[$ la fonction g par $g(x)=[f(x)]^2$.

- a) Calculer $g(-1)$, $g(0)$, $g(2)$.
- b) Déterminer $g'(x)$, étudier le signe de $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g .

III Problème (sur 10 points)

Partie A

Soit g la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 - 1200x - 100$$

On appelle (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité 1 cm).

- 1) Déterminer la limite de g en $+\infty$
Etudier le sens de variation de g et dresser son sens de variation.
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique a dans l'intervalle $[20 ; 40]$. Donner, en justifiant, une valeur approchée de a à l'unité près.
- 3) Déduisez-en le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x .

Partie B

Soit g la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 50 + \frac{1200x + 50}{x^2}$$

On appelle (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On prendra 1 cm pour 5 unités en abscisse et 1 cm pour 20 unités en ordonnée.

- 1) Déterminer la limite de f en 0 et en $+\infty$.
- 2) Montrer que pour tout x de $]0; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}, \text{ où } g \text{ est la fonction définie dans la partie A.}$$

- 3) Etudier les variations de f et donner le tableau de variation de f.
- 4) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 50$ est asymptote à la courbe (C).
- 5) Construisez (C) et (D) sur le même graphique.
- 6) Résolvez graphiquement l'équation $f(x) = 130$. On donnera les valeurs approchées des solutions à l'unité près.

Partie C

Le coût total de fabrication d'une quantité x d'un produit, exprimée en centaines d'unité, est définie sur $]0; 100[$ par :

$$C(x) = \frac{x^3 + 50x^2 + 1200x + 50}{x}$$

C(x) étant exprimé en milliers de francs.

Le coût moyen de fabrication par centaine d'objets est donc $C_M(x) = \frac{C(x)}{x}$

- 1) Déterminer la quantité d'objets, à la centaine près, à fabriquer pour avoir un coût moyen minimum.
- 2) On suppose que le prix de vente d'une centaine d'objets est égal à 130 000 F. Déterminer graphiquement, à la centaine près, le nombre minimum et le nombre maximum d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour être rentable.

Pour les élèves qui n' ont pas pris Math en spécialité : I + II + III

Pour les élèves qui ont pris Math en spécialité : I + II (spécialité) + III