

Probabilités

I Univers

1. Exemple

On lance un dé cubique numéroté 1, 2, 3, 4, 5, 6 et on note le chiffre obtenu par la face supérieure. Le résultat de ce lancer est **aléatoire**.

L'univers est $\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$.

2. Définitions

On appelle univers l'ensemble des cas possibles ou éventualités, on le note Ω .

On a $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$

- Un événement est une **partie** de Ω
- ω_i est un **événement élémentaire**
- L'événement impossible est la **partie vide** $\emptyset$
- L'événement certain est la **partie pleine** Ω

Soient A et B deux événements de l'univers Ω

- L'événement A ou B est noté $A \cup B$
- L'événement A et B est noté $A \cap B$
- A et B sont incompatibles si $A \cap B = \emptyset$

II Probabilité d'un événement

1. Définition

Soit un univers $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_n\}$. Définir une probabilité sur Ω , c'est associer à chaque ω_i un réel noté p_i tel que :

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1$$

La probabilité d'un événement A est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

2. Propriétés

$p(\emptyset) = 0$ et $p(\Omega) = 1$ donc $p_i \in [0; 1]$

Soit A un événement et $\bar{A}$ l'événement contraire $p(A) + p(\bar{A}) = 1$

3. Probabilité de l'union

Soit Ω un univers, A et B deux parties de Ω

- Si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
- Si $A \cap B = \emptyset$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

4. Equiprobabilité

Soit Ω un univers et A une partie de Ω . Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'il y a équiprobabilité et l'on a :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

III Loi de probabilité

1. Définition

Soit une épreuve dont les issues sont : $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

On définit une variable aléatoire X en associant un réel à chaque issue.

Définir une loi de probabilité, c'est associer à chaque x_i sa probabilité p_i .

On présentera les résultats sous forme de tableau :

x	x_1	x_2	$\dots\dots$	x_n
$p(X = x)$	p_1	p_2	$\dots\dots$	p_n

2. Espérance mathématique d'une variable aléatoire X

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X est le réel noté $E(X)$ défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

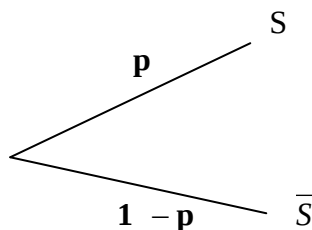
IV Loi binomiale

1. Epreuve de Bernoulli

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues :

- S appelé **succès** avec une probabilité p .
- $\bar{S}$ appelé **échec** avec une probabilité $1 - p$.

Cette situation constitue une épreuve de Bernoulli. On peut traduire la situation à l'aide d'un arbre.



2. Loi de Bernoulli

Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si S est réalisée et la valeur 0 si S n'est pas réalisée.

X suit une loi de Bernoulli de paramètre p définie dans le tableau suivant :

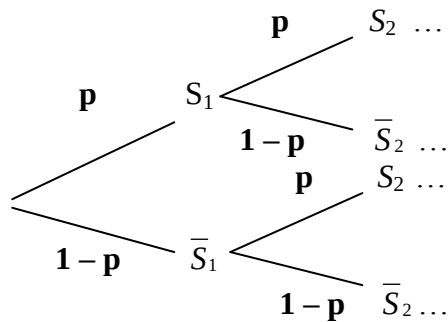
x	0	1
$p(X = x)$	$1 - p$	p

Espérance mathématique de X : $E(X) = \sum_{i=1}^2 p_i x_i = (1 - p)(0) + (1)(p) = p$

3. Schéma de Bernoulli

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition de n épreuves de Bernoulli **identiques** et **indépendantes**.

On peut utiliser un arbre pour déterminer les différentes issues.



4. Définition de la loi binomiale

On considère une expérience aléatoire à deux issues S et $\bar{S}$, de probabilités respectives p et $1-p$.

On répète n fois cette expérience de manières identiques et indépendantes.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès, on dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p que l'on note $\mathcal{B}(n, p)$.

La probabilité pour que X prenne la valeur k avec $0 \leq k \leq n$ est :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$\binom{n}{k}$ représente le nombre de succès parmi n épreuves.

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est : $E(X) = np$

V Probabilité conditionnelle

1. Probabilité de B sachant que A

Soit A et B deux événements de probabilités respectives $p(A)$ et $p(B)$ avec $p(A) \neq 0$

La probabilité conditionnelle de l'événement B sachant que l'événement A s'est produit est définie par :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

2. Formule des probabilités totales

Soient les événements $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ formant une partition de Ω (les événements sont deux à deux incompatibles).

Pour tout événement A (avec $p(B_n) \neq 0$),

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + p(A \cap B_3) + \dots + p(A \cap B_n)$$

ou

$$p(A) = p_{B_1}(A) \times p(B_1) + p_{B_2}(A) \times p(B_2) + p_{B_3}(A) \times p(B_3) + \dots + p_{B_n}(A) \times p(B_n)$$

3. Indépendance d'événements

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.

Si A et B sont indépendants alors $p_A(B) = p(B)$ d'où $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$