

Calcul matriciel

I Les matrices

1. Définition

Une **matrice** A de **format** ou **dimension** $n \times p$ est un tableau de nombres avec n lignes et p colonnes mis entre parenthèses.

$$\text{Exemple : } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A est une matrice à 2 lignes et 3 colonnes.

1) Matrices particulières

- Une **matrice ligne** est une matrice ne comportant qu'une seule ligne.

$$\text{Exemple : } A = (3 \quad 2 \quad -1)$$

- Une **matrice colonne** est une matrice ne comportant qu'une seule colonne.

$$\text{Exemple : } A = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- Une **matrice carrée** est une matrice qui a autant de lignes que de colonnes.

$$\text{Exemple : } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

- Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont tous les termes autres que ceux de la diagonale principale sont nuls.

$$\text{Exemple : } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Une **matrice nulle** est une matrice dont tous les termes sont nuls.

- La transposée d'une matrice est la matrice obtenue en permutant lignes et colonnes.

$$\text{Exemple : } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \quad A_t = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

2) Égalité de 2 matrices

Deux matrices A et B ayant la même dimension sont égales quand les termes correspondants sont égaux.

II Addition de matrices – multiplication par un nombre

1) Addition (ou soustraction)

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a : } A + B = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Multiplication par un nombre

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } k = -2$$

$$\text{On a } kA = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

3) Propriétés

Soient A , B et C trois matrices de mêmes dimensions, k et k' deux nombres.

$$A + B = B + A \text{ (commutativité)}$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \text{ (associativité)}$$

$$k(A + B) = kA + kB$$

$$(k + k')A = kA + k'A$$

$$k(k'A) = (kk')A$$

III Produit d'une matrice par une matrice colonne

Exemple :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} x - 2y \\ 3x + 2y \end{pmatrix}$$

IV Produit de 2 matrices

1) Définition

Soit A une matrice de format $n \times p$ et B une matrice de format $p \times m$.

Le produit de A par B est une matrice C de format $n \times m$.

Les termes C_{ij} de la matrice C sont obtenus de la manière suivante :
on multiplie la i -ème ligne de A par la j -ème colonne de B .

Exemple :

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = A \times B = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

Pour obtenir le terme de la 1^{ère} ligne, 1^{ère} colonne, on effectue les calculs suivants : $3 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times (-1) = 6$ et ainsi de suite pour les autres termes de $A \times B$.

2) Propriétés

Soient A , B et C trois matrices (multipliables entre elles)

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

$$A \times (B + C) = A \times B + A \times C$$

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C$$

V Inverse d'une matrice

1) Matrice identité

On appelle **matrice identité** d'ordre 2 une matrice carrée notée $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tous les termes sont nuls sauf ceux de la diagonale principale.

2) Inverse d'une matrice

Soit A une matrice et I_n la matrice identité d'ordre n .

B est la matrice inverse de A ssi $A \times B = I_n$