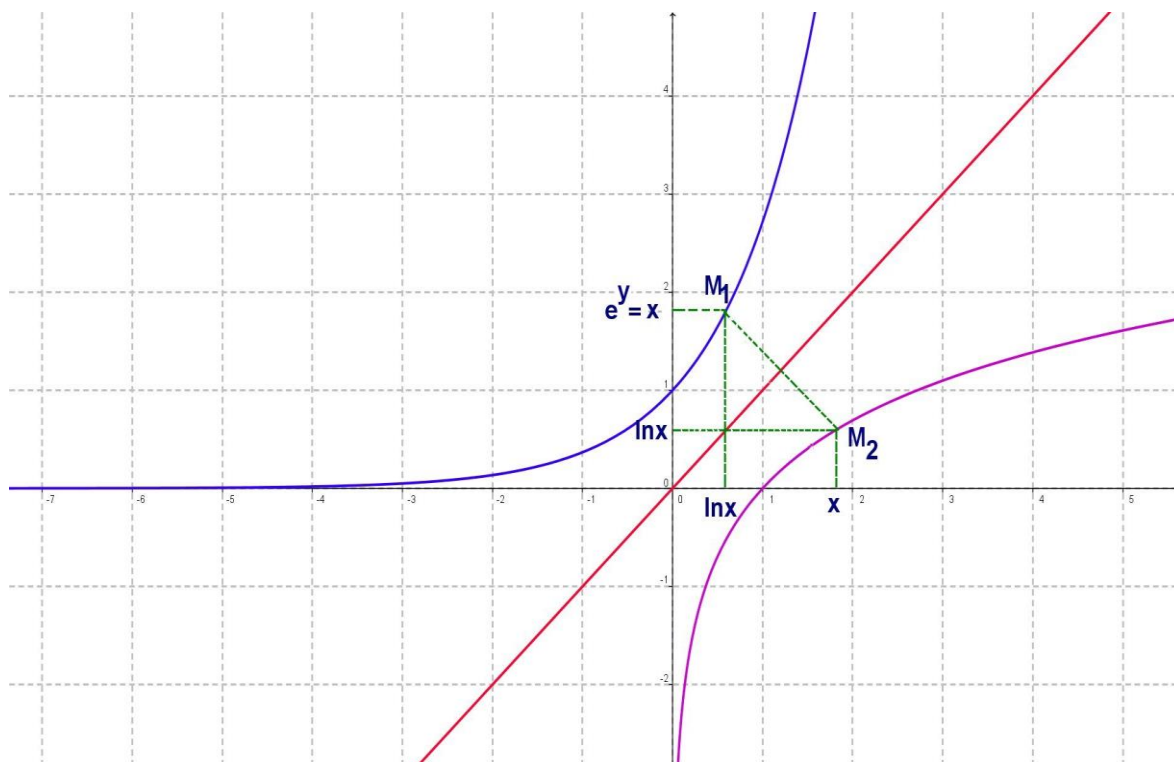


Fonction logarithme népérien

I Logarithme népérien d'un réel $x > 0$

1. Résolution de l'équation $e^y = x$

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0; +\infty[$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $e^y = x$ avec $x > 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ noté $\ln x$.



$\ln x$ est le **logarithme népérien** de x .

$\ln x$, avec $x > 0$, est le réel tel que son exponentielle est égale à x .

Pour tout réel $x > 0$, $e^y = x \Leftrightarrow y = \ln x$.

On a $M_1(\ln x; x)$ un point de la courbe représentative de la fonction exponentielle et en permutant abscisse et ordonnée, on obtient $M_2(x; \ln x)$ un point de la représentation graphique de la fonction logarithme népérien.

Les points M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ qui est appelée la 1^{ère} bissectrice donc la courbe représentative de la fonction logarithme népérien est la symétrique de la courbe représentative de la fonction exponentielle par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Graphiquement, on a $\ln x < x < e^x$

2. Définition

La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à tout réel $x > 0$ associe le réel $\ln x$ dont l'exponentielle est x .

Conséquences immédiates :

- Le domaine de définition de $x \mapsto \ln x$ est $]0; +\infty[$.
- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln x} = x$.
- Pour tout réel, $\ln e^x = x$

Autres conséquences :

Pour tout x de $]0; +\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$ donc la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Propriété : Pour tous réels a et b strictement positifs,

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$

Propriété : Pour tout réel $x > 0$,

- $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$
- $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$

Quelques exemples : Domaine de définition, Equations, Inéquations

II Propriétés algébriques

1. Logarithme d'un produit

Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Démonstration

On a $e^{\ln(ab)} = ab$ et $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = ab$ donc $e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b}$.

La fonction exponentielle étant strictement croissante, $e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b} \Leftrightarrow \ln(ab) = \ln a + \ln b$.

Généralisation : $\ln(a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \ln a_3 + \dots + \ln a_n$

2. Logarithme d'un quotient, d'un inverse

Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Pour tout réel a strictement positif, $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

Démonstration

On a $a = \frac{a}{b} \times b$ donc $\ln a = \ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln \frac{a}{b} + \ln b$ soit $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$

Si $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b = 1$, alors $\ln \frac{1}{a} = \ln 1 - \ln a = -\ln a$

3. Logarithme de a^n

Pour tout réel a strictement positif et pour tout entier relatif n , $\ln a^n = n \ln a$

Démonstration

- Si $n \geq 1$ alors $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$

On a vu que $\ln(a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \ln a_3 + \dots + \ln a_n$

donc $\ln a^n = \ln a + \ln a + \ln a + \dots + \ln a = n \ln a$

- Si $n \leq -1$ alors $a^n = a \times a \times a \times \dots \times a$

On a vu que $\ln(a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_n) = \ln a_1 + \ln a_2 + \ln a_3 + \dots + \ln a_n$

donc $\ln a^n = \ln \frac{1}{a^{-n}} = -\ln(a^{-n})$

Or $-n \geq 1$ donc $\ln a^n = -(-n) \ln a = n \ln a$

- Si $n = 0$ alors $\ln a^0 = \ln a^0 = \ln 1 = 0 = 0 \ln a$

4. Logarithme de $\sqrt{a}$

Pour tout réel a strictement positif, $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

Démonstration

On a $a = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2$ donc $\ln a = \ln(\sqrt{a})^2 = 2 \ln \sqrt{a}$ soit $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

III Etude de la fonction logarithme népérien

1. Continuité et dérivabilité

La fonction $\ln$ est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Démonstration

Nous admettons que la fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Posons $f(x) = e^{\ln x}$.

Alors $f'(x) = (\ln x)' e^{\ln x} = x(\ln x)'$

Comme $f(x) = x$, on a $f'(x) = 1$.

Donc $x(\ln x)' = 1$ et donc $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

2. Variations

Comme $x > 0$, donc $(\ln x)' > 0$.

La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$

Valeurs particulières

On a $e^0 = 1$ donc $\ln 1 = 0$ et $e^1 = e$ donc $\ln e = 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

x	0	1	e	$+\infty$
Signe de $\left(\frac{1}{x}\right)'$			+	
Variations de $\ln$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

3. Convexité de la fonction $\ln$

La fonction $\ln$ est concave sur $]0; +\infty[$.

Démonstration

Pour tout réel $x > 0$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ et $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$.

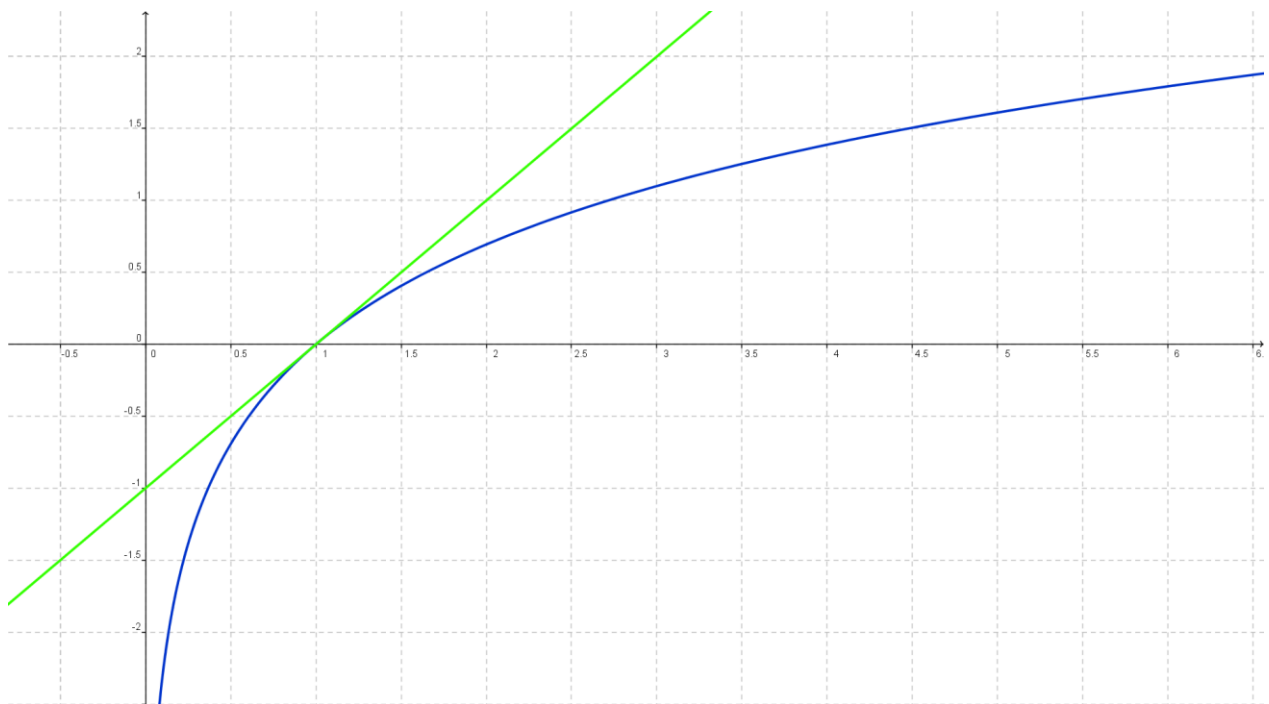
Or $-\frac{1}{x^2} < 0$ donc la fonction logarithme népérien est concave sur $]0; +\infty[$.

4. Tangente particulière

Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction $\ln$ au point d'abscisse 1 est :

$$y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1 \text{ soit } y = x - 1.$$

5. Courbe représentative de la fonction ln



IV Résolution de l'équation $x^n = k$ sur $]0; +\infty[$ avec $k > 0$ et n entier naturel

Exemple : Soit à résoudre l'équation $x^5 = 100$ avec $x > 0$.

$$x^5 = 100 \text{ équivaut à } \ln x^5 = \ln 100 \text{ ce qui équivaut à } 5 \ln x = \ln 100 \text{ donc } \ln x = \frac{\ln 100}{5}$$

$$x = e^{\frac{\ln 100}{5}} \simeq 2,51$$