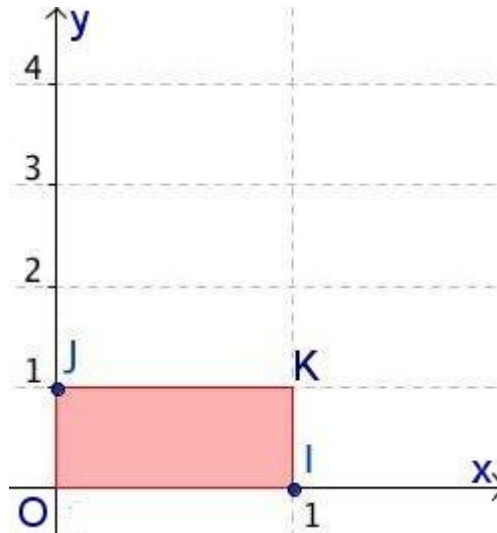


Intégration

I Intégrales et aires

1. Unité d'aire

Soit (O, I, J) un repère orthogonal du plan et K le point de coordonnées $(1 ; 1)$.



L'unité d'aire est l'aire du rectangle $OIKJ$. On la note u.a.

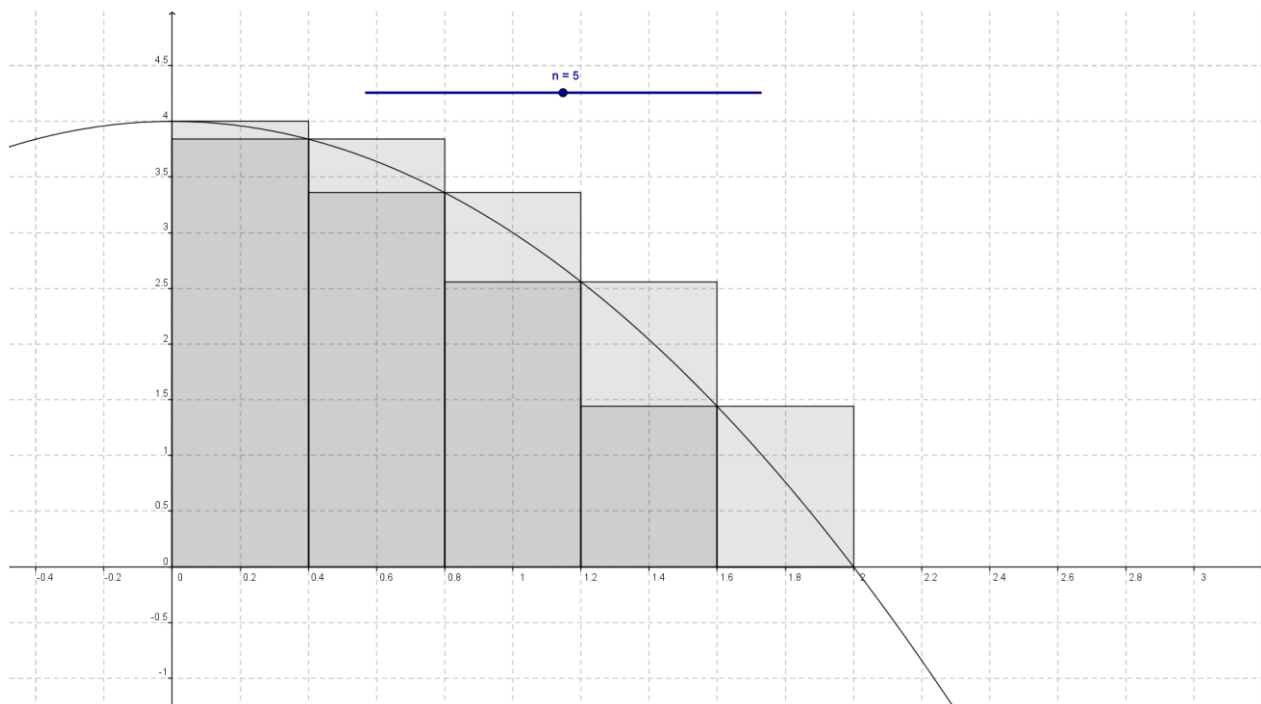
2. Une approche des aires en utilisant Géogébra

Soit f la fonction définie par $f(x) = 4 - x^2$, déterminons graphiquement l'aire comprise entre la courbe représentative de f représentée dans un repère orthogonal (O, I, J) , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 2$.

En coupant l'intervalle $[0 ; 2]$ en un certain nombre n d'intervalles d'égale amplitude $\frac{2}{n}$, on peut tracer des rectangles minorant l'aire et majorant l'aire.

Les instructions :

- Dans la cellule de saisie : $f(x) = 4 - x^2$
- Créer un curseur nommé n allant de 0 à 10 avec un pas de 1
- Dans la cellule de saisie : AireInf = SommeInférieure[$f(x)$, 0, 2, n]
- Dans la cellule de saisie : AireSup = SommeSupérieure[$f(x)$, 0, 2, n]

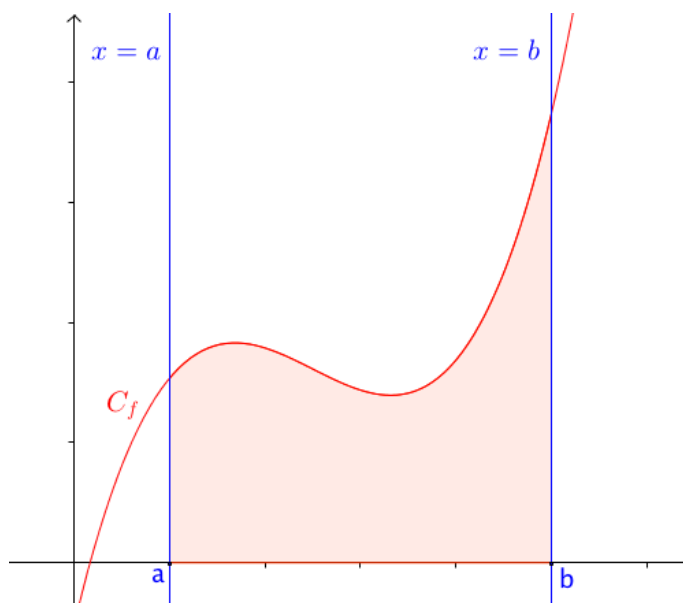


Remarque : En prenant une grande valeur pour n , les rectangles sont pratiquement confondus et on trouve que l'aire est de 4,33 en unités d'aire.

3. Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$

Soit une fonction f définie, continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.

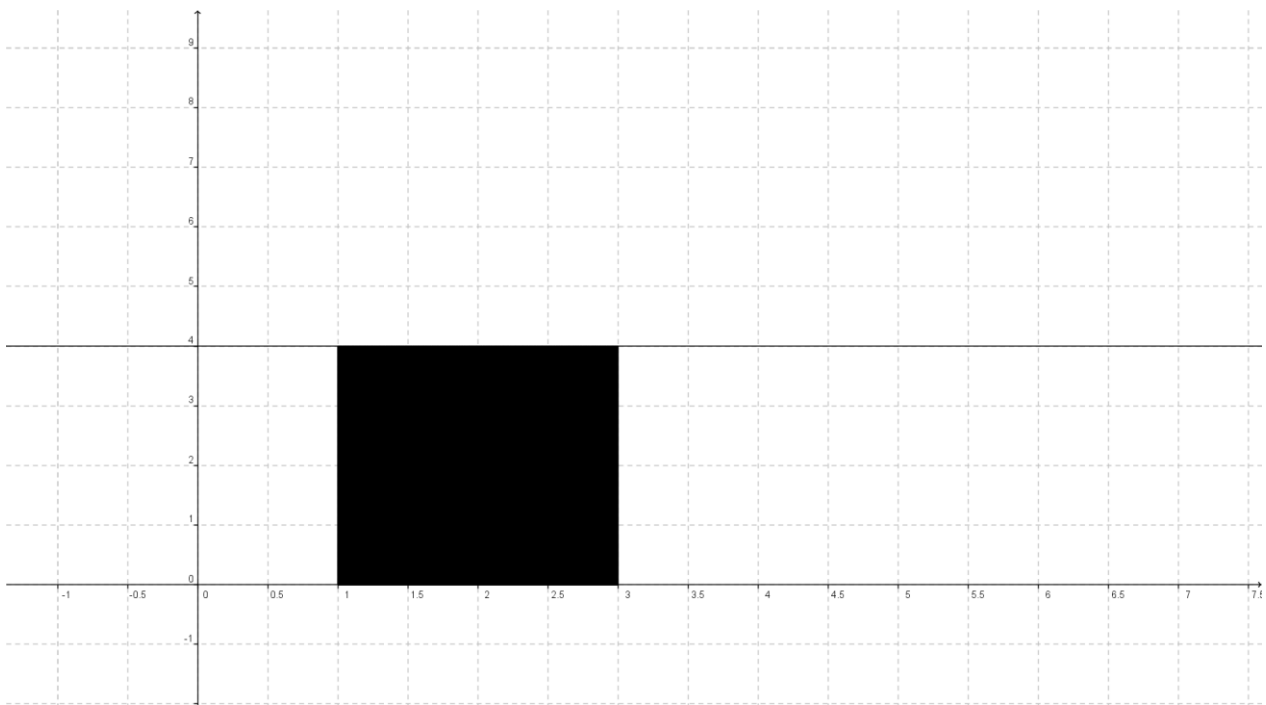
On appelle intégrale de f sur $[a ; b]$ l'aire du domaine du plan, exprimée en u.a, de la surface délimitée dans un repère orthogonal par la courbe représentative de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. On la note $\int_a^b f(x)dx$. Cela se lit « intégrale de a à b de f »



- a et b sont les bornes d'intégration.
- x est la variable. Elle peut être remplacée par toute autre lettre qui n'intervient pas dans les bornes.

4. Exemples

- Soit f définie par $f(x) = 4$. Déterminons l'intégrale de f sur l'intervalle $[1 ; 3]$.
Représentons la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, I, J) sur l'intervalle $[1 ; 3]$.

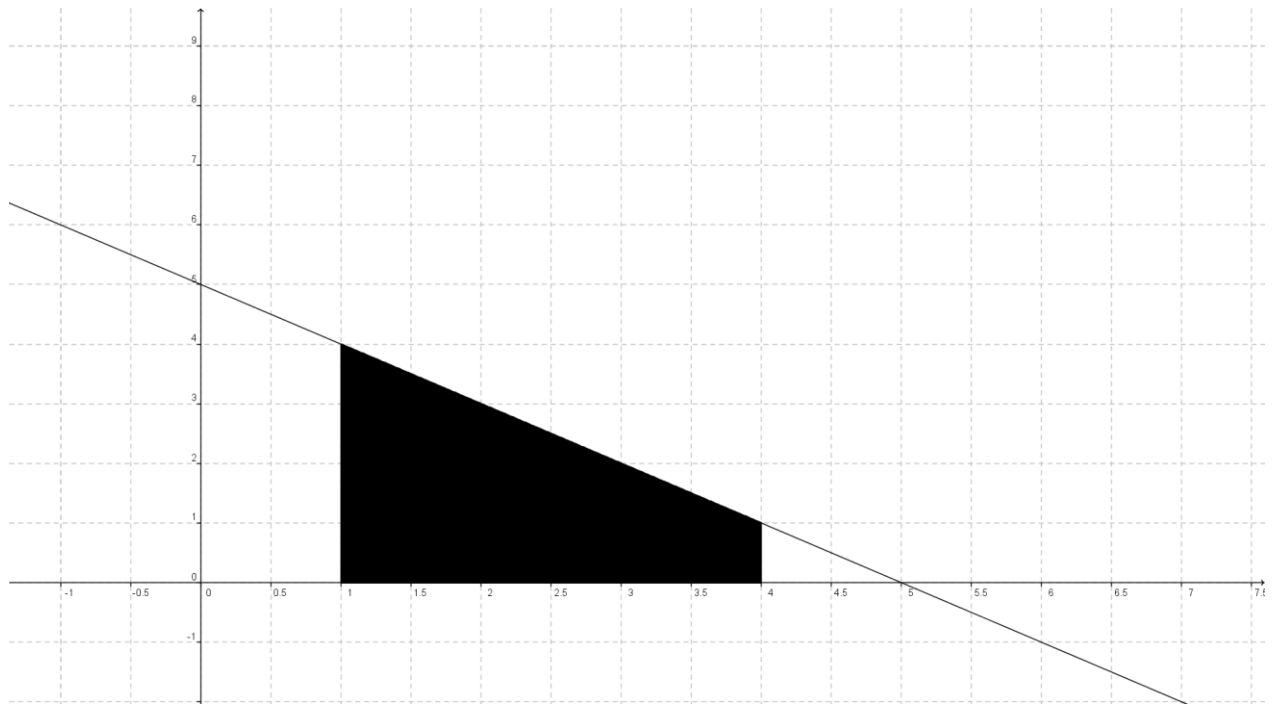


f est définie, continue et positive sur un intervalle $[1 ; 3]$.

La figure formée est un rectangle de base 2 et de hauteur 4. L'aire est de 8 u.a donc $\int_1^3 f(x)dx = 8$

Avec la calculatrice : intégrFonct(4,x,1, 2) donne 8

- Soit f définie par $f(x) = 5 - x$. Déterminons l'intégrale de f sur l'intervalle $[1 ; 4]$.
Représentons la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, I, J) sur l'intervalle $[1 ; 4]$.



f est définie, continue et positive sur un intervalle $[1 ; 4]$.

La figure formée est un trapèze de bases 1 et 4 et de hauteur 3. L'aire est de $\frac{1+4}{2} \times 3 = 7,5$ u.a donc

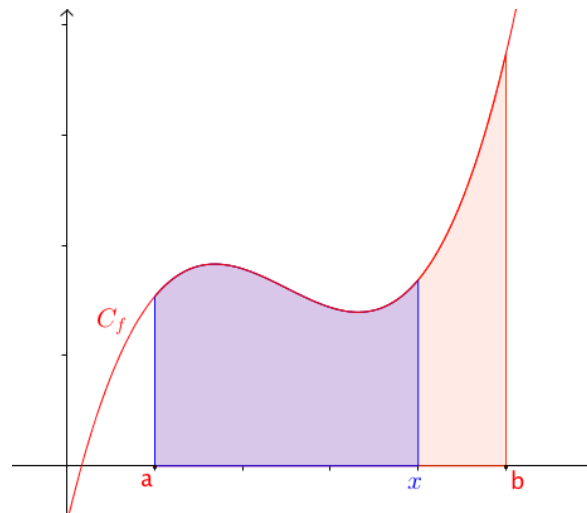
$$\int_1^4 f(x)dx = 7,5$$

Avec la calculatrice : intégrFonct(4,5 - x,1, 4) donne 7.5

5. Fonction $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$

Soit une fonction f définie, continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$ et sa courbe représentative placée dans un repère orthogonal (O, I, J) . Soit x un réel de $[a ; b]$.

$F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est égal à l'aire, en u.a, située sous la courbe représentative de f sur l'intervalle $[a ; x]$.



Remarque :

Si $x = a$ alors $F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ car il n'y a plus d'aire.

Si $x = b$ alors $F(b) = \int_a^b f(t)dt$ car il n'y a plus d'aire.

Donc $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Théorème (Admis)

Soit une fonction f définie, continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$. La fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a ; b]$ et a pour dérivée f .

Pour déterminer l'intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$, il suffira de trouver une fonction F définie et dérivable sur l'intervalle $[a ; b]$ et de calculer $I = F(b) - F(a)$.

Exemple :

Soit f définie par $f(x) = 2x$. Déterminons $I = \int_0^2 f(t)dt$.

La fonction f est définie, continue et positive sur l'intervalle $[0; 2]$.

Soit F définie par $F(x) = x^2$. F est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; 2]$ avec $F'(x) = 2x = f(x)$.

Donc $I = \int_0^2 f(t)dt = F(2) - F(0) = 4$

II Intégrales et primitives

1. Définition

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I .

On dit que la fonction F est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et, pour tout x de I , on a $F'(x) = f(x)$.

Exemples :

La fonction $F : x \mapsto 5x - 4$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 5$ car F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine et que $F'(x) = 5$.

La fonction $F : x \mapsto x^2 - 4x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2x - 4$ car F est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et que $F'(x) = 2x - 4$.

Remarque : La fonction $F : x \mapsto x^2 - 4x + 5$ est aussi une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto 2x - 4$

2. Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle I admet sur cet intervalle une infinité de primitives.

3. Ensemble des primitives d'une fonction

F étant une primitive de f sur un intervalle I , la fonction G définie par $G(x) = F(x) + k$ est aussi une primitive de f sur l'intervalle I .

$$G'(x) = (F(x) + k)' = F'(x) + (k)' = F'(x) = f(x)$$

F et G sont deux primitives de f sur l'intervalle I .

L'ensemble des primitives de f est noté : $x \mapsto F(x) + k$

4. Primitive prenant une valeur donnée en un point donné

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit x_0 et y_0 deux réels.

Il existe une unique primitive F telle que $F(x_0) = y_0$.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 4$, déterminons la primitive de f notée F telle que $F(3) = 1$.

f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme, elle admet donc une infinité de primitives sur $\mathbb{R}$.

L'ensemble des primitives de f est la fonction F telle que $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 4x + k$

$$F(3) = 1 \Leftrightarrow 9 + 9 - 12 + k = 1$$

$$\Leftrightarrow k = -5$$

F est définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 4x - 5$.

5. Propriétés des primitives

- Si F et G sont des primitives respectives de f et g sur un intervalle I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$.
- Si F est une primitive de f sur un intervalle I et si k est un réel donné alors kF est une primitive de kf sur I .

6. Propriétés des intégrales

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$ et F une primitive de f .

- $\int_a^a f(t)dt = [F(x)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$
- $\int_b^a f(t)dt = [F(x)]_b^a = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(t)dt$
- $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = \int_a^c f(t)dt$ (relation de Chasles)
- Si f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$ alors $\int_a^b f(t)dt$ est un réel positif.
- Soit f et g deux fonctions définies et continues sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$.

Si pour tout réel x de $[a ; b]$ on a $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

7. Formulaires pour les primitives

Fonction f	Une primitive F	Sur l'intervalle
$x \mapsto k$	$x \mapsto kx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{x^2}{2}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto \frac{x^3}{3}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ avec n entier naturel	$x \mapsto \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x}$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$	$] 0 ; +\infty[$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$	$x \mapsto e^{u(x)}$	avec u définie

Exemples

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x - 3$
 f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme donc f admet une infinité de primitives sur $\mathbb{R}$.

Une primitive F de f est définie par $F(x) = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} - 3x$ soit
 $F(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x$

- Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{7}{x^3}$
 f est continue sur $]0; +\infty[$ en tant que fonction rationnelle donc f admet une infinité de primitives sur $]0; +\infty[$.

$$f(x) = \frac{7}{x^3} = 7x^{-3}$$

Une primitive F de f est définie par $F(x) = 7\frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{7}{2x^2}$ soit $F(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x$

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)(x^2 + 4x - 1)^3$
 f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme donc f admet une infinité de primitives sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = x^2 + 4x - 1$ d'où $u'(x) = 2x + 4$

$$f(x) = \frac{1}{2}(2x+4)(x^2 + 4x - 1)^3$$

f est de la forme $u'u^n$ donc F est de la forme $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{(x^2 + 4x - 1)^4}{4} + k = \frac{1}{8}(x^2 + 4x - 1)^4 + k$$

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{5x}{(x^2 + 3)^3}$
 f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction rationnelle donc f admet une infinité de primitives sur $\mathbb{R}$.

On pose $u(x) = x^2 + 3$ d'où $u'(x) = 2x$

$$f(x) = \frac{5}{2}(2x)(x^2 + 3)^{-3}$$

f est de la forme $u'u^n$ donc F est de la forme $\frac{u^{n+1}}{n+1}$.

$$F(x) = \frac{5}{2} \frac{(x^2 + 3)^{-2}}{-2} + k = -\frac{5}{4(x^2 + 3)^2} + k$$

III Valeur moyenne d'une fonction

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$.

On appelle valeur moyenne de f sur $[a ; b]$ le réel m défini par $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$.