

Continuité et convexité

I Rappels sur la dérivation

1. Fonction dérivable en a

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

On dit que f est dérivable en a si le rapport $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un réel quand h tend vers 0. Ce réel est noté $f'(a)$. C'est le nombre dérivé de f en a .

2. Equation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative. Une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

3. Fonction dérivée

Soit une fonction f définie sur un intervalle I . La fonction qui à tout x de I , où f est dérivable, associe son nombre dérivé est appelée fonction dérivée. On la note f' .

$$f': x \mapsto f'(x)$$

4. Dérivées usuelles

f est une fonction, n un entier relatif et k un réel.

fonction	$f(x) =$	Dérivable sur	$f'(x) =$
constante	k	$\mathbb{R}$	0
affine	$ax + b$	$\mathbb{R}$	a
carré	x^2	$\mathbb{R}$	$2x$
puissance	x^n avec $n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 2$ $] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$ si $n \leq -1$	nx^{n-1}
inverse	$\frac{1}{x}$	$] -\infty; 0[$ et $] 0; +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$
racine	$\sqrt{x}$	$] 0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

5. Opérations sur les fonctions dérivables

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un même intervalle I .

fonction	fonction dérivée	condition
$u + v$	$u' + v'$	
ku	ku'	
uv	$u'v + uv'$	
u^2	$2u'u$	
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$

6. Dérivabilité des fonctions polynômes et des fonctions rationnelles

- Toute fonction polynôme ($x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ avec $n \in \mathbb{N}$) est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle (quotient de deux fonctions polynômes) est dérivable sur son domaine de définition.

7. Sens de variation d'une fonction dérivable

Théorème

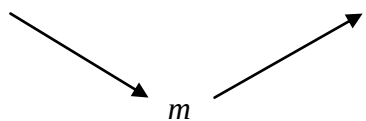
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si $f'(x) = 0$ pour tout x de I alors f est constante sur I .
- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout x de I alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout x de I alors f est décroissante sur I .

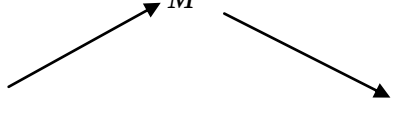
Extremum

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I .

Si la fonction dérivée f' s'annule en a et change de signe en a alors f admet un **extremum local** en a qui est $f(a)$.

x	a		
signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f			

m est le **minimum** de f en a

x	a		
signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

M est le **maximum** de f en a .

II Continuité

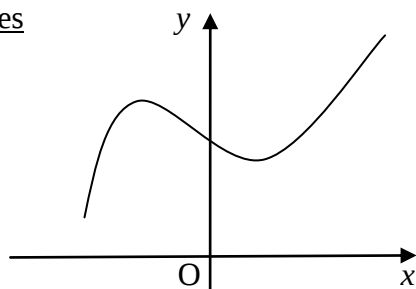
1. Fonctions continues

Définition

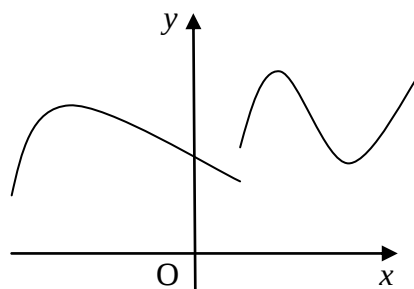
Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

La fonction f est continue sur I lorsque l'on peut tracer la courbe représentative de f "sans lever le crayon".

Exemples



f est continue



f n'est pas continue

Propriétés

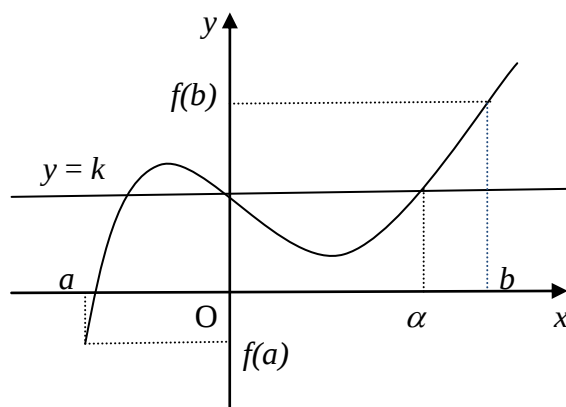
- Les fonctions usuelles (affine, carré, inverse, racine carrée) sont continues sur chaque intervalle de leur ensemble de définition.
- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle de leur domaine de définition.

III Théorème des valeurs intermédiaires

1. Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$.

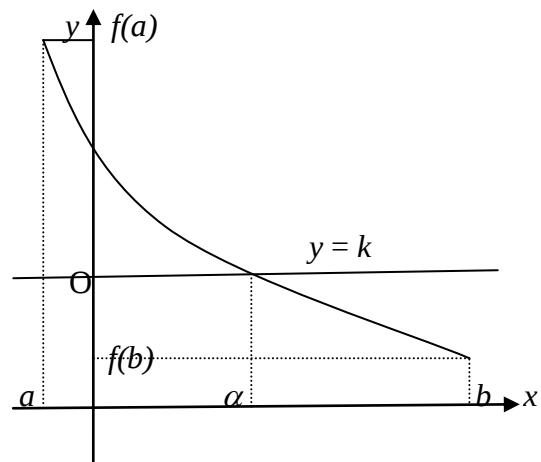
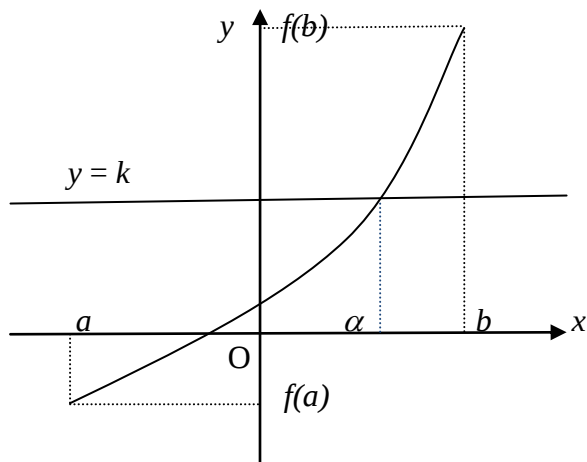
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel α solution de l'équation $f(x) = k$.



2. Cas où f est strictement monotone (strictement croissante ou strictement décroissante).

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique réel α solution de l'équation $f(x) = k$.



Exemple

Réolvons l'équation $x^3 + x - 25 = 0$ sur l'intervalle $[0 ; 5]$

Soit f définie par $f(x) = x^3 + x - 25$

Pour tout x de $[0 ; 5]$, $f'(x) = 3x^2 + 1$

On a $3x^2 \geq 0$ et $3x^2 + 1 > 0$ donc f est strictement croissante sur $[0 ; 5]$.

$f(0) = -25$ et $f(5) = 105$

Sur l'intervalle $[0 ; 5]$, f est continue et strictement croissante à valeurs dans $[-25 ; 105]$.

Comme $0 \in [-25 ; 105]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[0 ; 5]$.

En utilisant la fonction table avec des pas de 1 puis 0,1 et 0,01, on obtient $\alpha = 2,81$ à 10^{-2} près.

Pas de 1

X	Y1
2	-15
3	5

$2 < \alpha < 3$

Pas de 0,1

X	Y1
2.8	-.248
2.9	2.289

$2,8 < \alpha < 2,9$

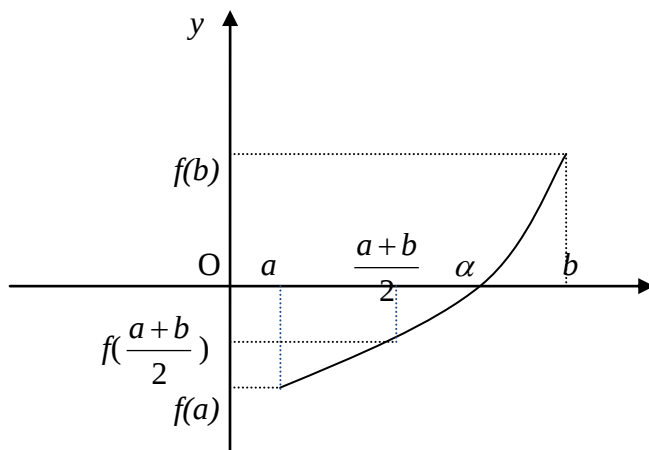
Pas de 0,01

X	Y1
2.81	-.002
2.82	0.24577

$2,81 < \alpha < 2,82$

Principe de la dichotomie pour encadrer la solution α de l'équation $f(x) = 0$.

On va se placer dans le cas d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a ; b]$.



On cherche l'image de $\frac{a+b}{2}$. Si $f(\frac{a+b}{2}) \times f(a) < 0$ alors $\frac{a+b}{2}$ remplace a , sinon $\frac{a+b}{2}$ remplace b .

Et on effectue 30 fois le produit $f(\frac{a+b}{2}) \times f(a)$ pour encadrer α . A la fin, on affiche a et b .

Les 2 valeurs a et b sont pratiquement identiques.

L'algorithme	Le programme sur TI-83 plus.fr
Variables : A et B deux réels Début Pour I allant de 1 à 30 Si $Y1(A) \times Y1((A+B)/2) < 0$ Alors mettre $(A+B)/2$ en B Sinon mettre $(A+B)/2$ en A Fin de SI Fin de pour Afficher A et B Fin	Input "ENTREE DE A",A Input "ENTREE DE B",B For(I,1,30) If $Y1(A) \times Y1((A+B)/2) < 0$ Then $(A+B)/2 \rightarrow B$ Else $(A+B)/2 \rightarrow A$ End End Disp A,B

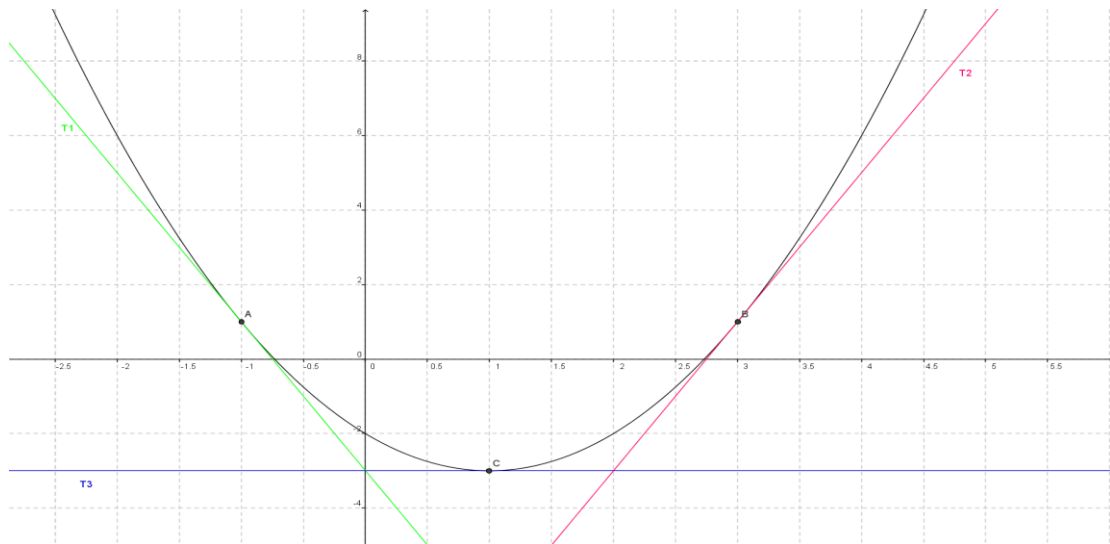
IV La convexité

1. Fonction convexe et concave

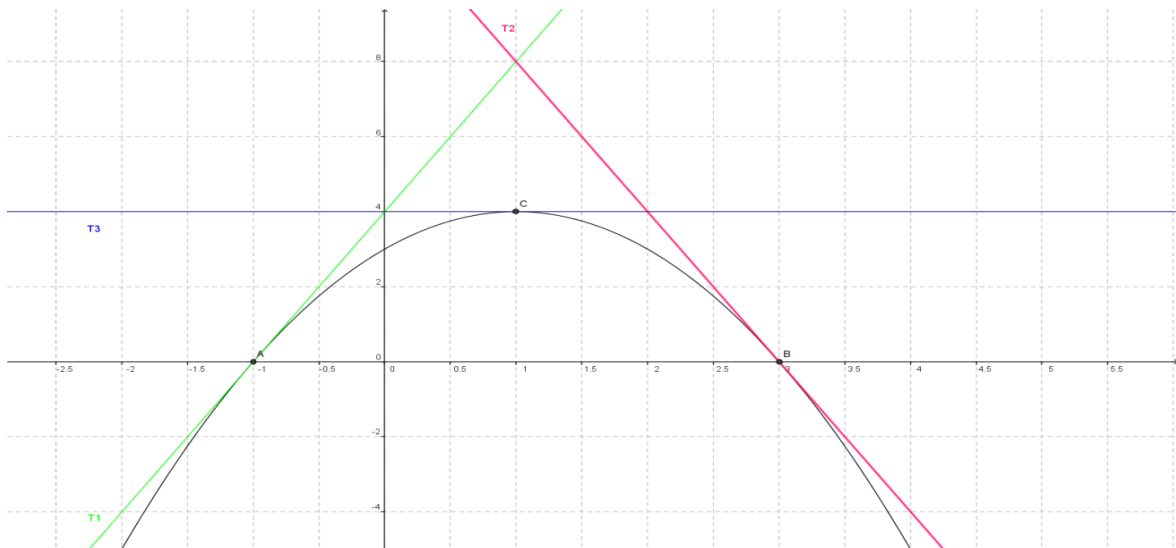
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

Soit C_f la courbe représentative de f .

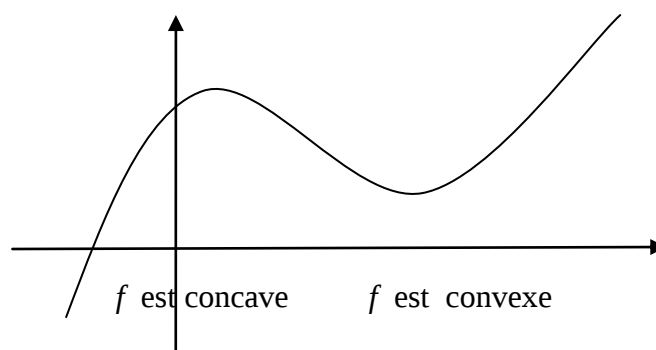
- La fonction f est dite **convexe** si C_f est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.



- La fonction f est dite **concave** si C_f est située entièrement en-dessous de chacune de ses tangentes.



- Cas général



- Exemples de fonctions convexes et concaves

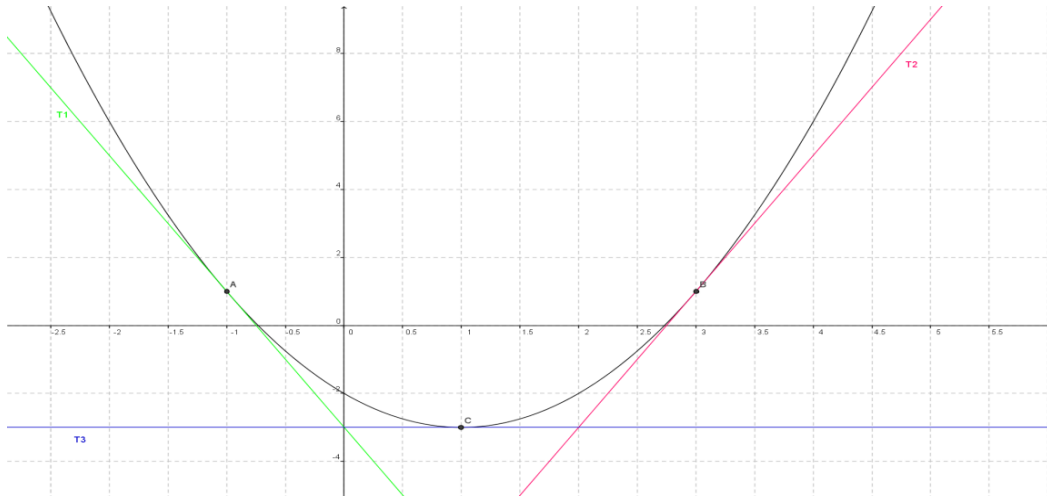
La fonction carré est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

La fonction inverse est une fonction convexe sur $]0; +\infty[$.

La fonction inverse est une fonction concave sur $] -\infty; 0[$.

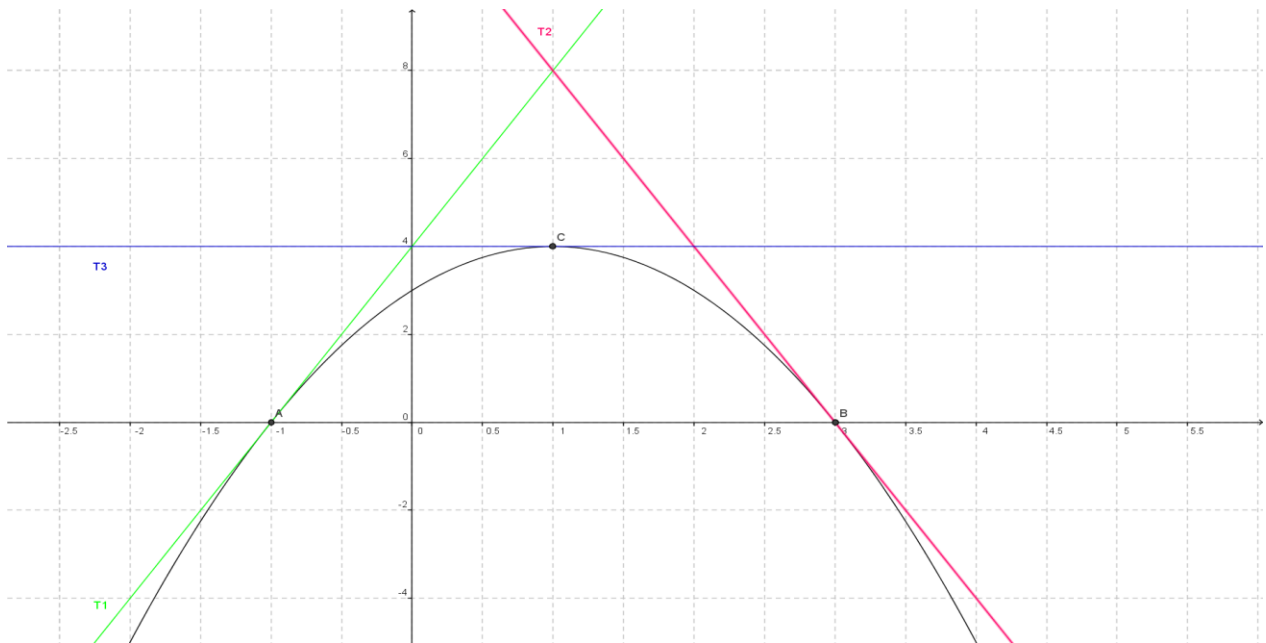
2. Signe de $f''(x)$ et point d'inflexion

- Si f est **convexe** sur un intervalle I alors f' est croissante sur I donc $f''(x) \geq 0$.



Graphiquement :

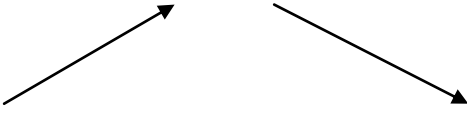
- Les coefficients directeurs des tangentes augmentent.
 - Les nombres dérivés augmentent.
 - La fonction f' est donc croissante d'où $f''(x) \geq 0$.
- Si f est **concave** sur un intervalle I alors f' est décroissante sur I donc $f''(x) \leq 0$.



Graphiquement :

- Les coefficients directeurs des tangentes diminuent.
- Les nombres dérivés diminuent..
- La fonction f' est donc décroissante d'où $f''(x) \leq 0$.

- Signe de $f''(x)$ et conséquences

x	a		
signe de $f''(x)$	+	0	-
Variations de f'			
Convexité de f	Convexe		Concave

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative. Soit a un réel de I .

Si f'' s'annule en a en changeant de signe en a alors C_f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a .